

CALCUL ALGÈBRE

① Ecrire sans symbole

$$A = \sum_{k=0}^5 k^2 ; \quad B = \prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1} ; \quad C = \sum_{k=0}^3 \frac{k^2}{k+1} ; \quad D = \prod_{k=0}^5 \frac{4}{k+1}$$

② Ecrire avec un symbole (sans points de suspension)

$$A = 50 + 51 + \dots + 99 + 100$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$$

$$C = 1 + 4 + 9 + \overset{16}{16} + 25 + \dots + 121$$

$$D = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} + \frac{100}{101}$$

③ Développer les expressions suivantes

$$A = (x+y)^4 ; \quad B = (x-y)^3 ; \quad C = (1+x)^6$$

$$D = (x-1)^3 ; \quad E = (\sqrt{2}-1)^4 ; \quad F = (1+2x)^3$$

④ Calculer / simplifier les expressions suivantes

$$\frac{12!}{10!} ; \quad \frac{10!}{(6!)^2} ; \quad \frac{11!}{9! \times 2!} ; \quad \binom{10}{8} ; \quad \binom{15}{14} ; \quad \binom{13}{11} ;$$

$$\binom{n}{1} ; \quad \binom{n+1}{2} ; \quad \binom{n+1}{n} ; \quad \frac{(n+2)!}{(n+1)!} ; \quad \frac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$$

⑤ À l'aide d'un changement d'indice, calculer

$$A = \sum_{k=0}^M (e^{k+1} - e^k) ; \quad B = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k} \right)$$

$$C = \sum_{k=1}^{99} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) ; \quad D = \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2)$$

$$E = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} ; \quad F = \sum_{k=1}^{10} (k! - (k-1)!)$$

RÉCURRENCES

Montrer par récurrence que

$$\textcircled{1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

$$\textcircled{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

$$\textcircled{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n 3k(k+1) = n(n+1)(n+2)$$

$$\textcircled{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$