Pour s'entraîner
Les complexes

Représentation dans le plan

Exercice 1. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1. Soit D le point de coordonnées $(1; -2)$. Quel est son affixe ?

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + \mathbf{i}, \quad z_B = 2\mathbf{i}, \quad z_C = 3.$$

2. Placer les points A, B, C.
3. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1. $|z| = 3$
2. $\mathrm{Re}(z) = -2$
3. $\mathrm{Im}(z) = 1$

Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 3. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants et identifier leurs parties réelle et imaginaire :

1. $z = (3 + 2\mathbf{i}) - (1 - 3\mathbf{i})$
2. $z = 6 + \mathbf{i} - (2 + 4\mathbf{i})$
3. $z = (1 + 2\mathbf{i})(4 + 3\mathbf{i})$
4. $z = (3 - \mathbf{i})(2 + 7\mathbf{i})$
5. $z = (1 + \mathbf{i})^2$
6. $z = \left(3 + \mathbf{i}\sqrt{5}\right)\left(3 - \mathbf{i}\sqrt{5}\right)$
7. $z = (2 - 5\mathbf{i})^2$
8. $z = (1 + \mathbf{i})(2 - 3\mathbf{i})(1 + \mathbf{i})$
9. $z = (1 - 2\mathbf{i})^2(2 + \mathbf{i})$

Exercice 4. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{1 - \mathbf{i}}$
2. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i} + 2}$
3. $z = \dfrac{1}{4 - 3\mathbf{i}}$
4. $z = \dfrac{4 - 6\mathbf{i}}{3 + 2\mathbf{i}}$
5. $z = \dfrac{5 + 15\mathbf{i}}{\mathbf{i}}$
6. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{1 - 2\mathbf{i}}$
7. $z = \left(\dfrac{1 - \mathbf{i}}{2 - 3\mathbf{i}}\right)\left(\dfrac{3 + \mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right)$

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 5. *Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$.*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1 + \mathbf{i})\,z = 3 - \mathbf{i}$
2. $2z + 1 - \mathbf{i} = \mathbf{i}z + 2$
3. $(2z + 1 - \mathbf{i})(\mathbf{i}z + 3) = 0$

4. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2\mathbf{i}$
5. $(\mathbf{i}z+1)(z+3\mathbf{i})(z-1+4\mathbf{i}) = 0$

Cours :

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle double :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b-\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Factorisation :

— Si $\Delta \neq 0$, alors

$$az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2).$$

— Si $\Delta = 0$, alors

$$az^2 + bz + c = a(z-z_0)^2$$

Relations coefficients/racines :

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } z^2 - sz + p = 0$$
$$\text{si et seulement si } \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 \times z_2 = p \end{cases}.$$

Exercice 6. *Résolution d'équations du second degré dans* $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2. $z^2 - 5z + 9 = 0$
3. $z^2 - 2z + 3 = 0$
4. $z^2 = z + 1$
5. $z^2 + 3 = 0$
6. $z^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)z + 2\left(\sqrt{2}+2\right) = 0$

Exercice 7. *Changement de variables / Recherche d'une solution évidente et division euclidienne*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
2. $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$
3. $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$
4. $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exercice 8. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = 2 + 2\mathbf{i}\sqrt{3}$
2. $z = -\sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2}$
3. $z = 4 - 4\mathbf{i}$
4. $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{4}$
5. $z = -2\mathbf{i}$
6. $z = \dfrac{4}{1-\mathbf{i}}$

Exercice 9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = (1-\mathbf{i})^6$
2. $z = \dfrac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{1+\mathbf{i}}$
3. $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)^9}{(1+\mathbf{i})^{12}}$

4. $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$
5. $z = 2\left(\sin\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\cos\frac{\pi}{6}\right)$
6. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 10. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$
2. $z = \left(\sqrt{8}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}\right)\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}\right)$
3. $z = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}$
4. $z = 3\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$

Divers

Exercice 11. Soit z un complexe différent de 2. On pose $z' = \dfrac{\mathbf{i}z}{z-2}$. Montrer que

$$z' \text{ est un imaginaire pur si et seulement si } z \text{ est réel.}$$

Exercice 12. *Relations coefficients/racines*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

d'inconnue (z_1, z_2).