Pour s'entraîner – Corrections
Les complexes

Représentation dans le plan

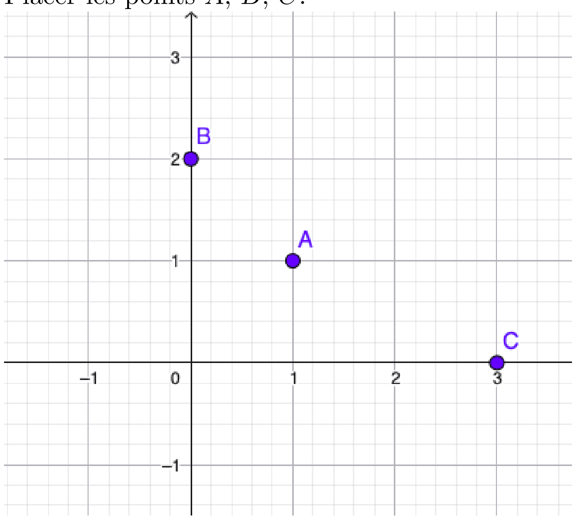
Exercice 1. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1. Soit D le point de coordonnées $(1; -2)$. Quel est son affixe ? $z_D = 1 - 2\mathbf{i}$

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + \mathbf{i}, \quad z_B = 2\mathbf{i}, \quad z_C = 3.$$

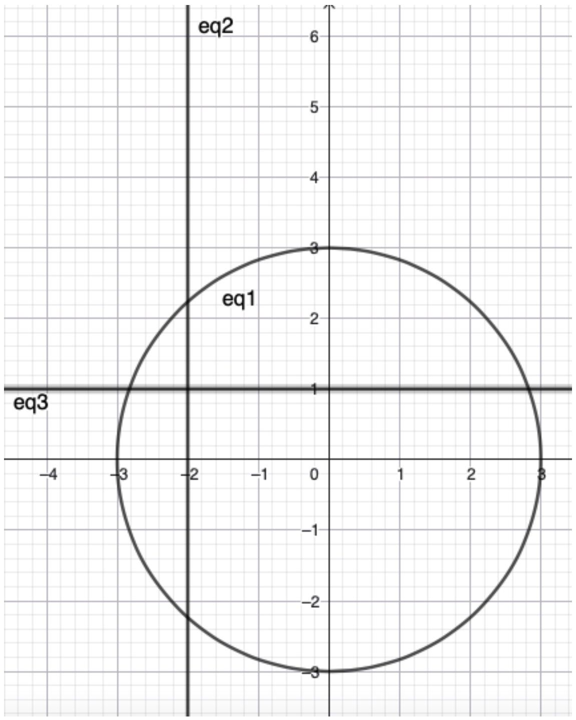
2. Placer les points A, B, C.



3. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -1 + \mathbf{i}$, $z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 2 - \mathbf{i}$ et $z_{\vec{BC}} = z_C - z_B = 3 - 2i$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1. $|z| = 3$
2. $\mathrm{Re}(z) = -2$
3. $\mathrm{Im}(z) = 1$



Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 3. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants et identifier leurs parties réelle et imaginaire :

1. $z = (3+2\mathbf{i}) - (1-3\mathbf{i}) = 2+5\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 2 \quad \mathrm{Im}(z) = 5$
2. $z = 6+\mathbf{i} - (2+4\mathbf{i}) = 4-3\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 4 \quad \mathrm{Im}(z) = -3$
3. $z = (1+2\mathbf{i})(4+3\mathbf{i}) = -2+11\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = -2 \quad \mathrm{Im}(z) = 11$
4. $z = (3-\mathbf{i})(2+7\mathbf{i}) = 13+19\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 13 \quad \mathrm{Im}(z) = 19$
5. $z = (1+\mathbf{i})^2 = 2\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 0 \quad \mathrm{Im}(z) = 2$
6. $z = \left(3+\mathbf{i}\sqrt{5}\right)\left(3-\mathbf{i}\sqrt{5}\right) = 14$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 14 \quad \mathrm{Im}(z) = 0$
7. $z = (2-5\mathbf{i})^2 = -21+20\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = -21 \quad \mathrm{Im}(z) = 20$
8. $z = (1+\mathbf{i})(2-3\mathbf{i})(1+\mathbf{i}) = 6+4\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 6 \quad \mathrm{Im}(z) = 4$
9. $z = (1-2\mathbf{i})^2(2+\mathbf{i}) = -2-11\mathbf{i}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = -2 \quad \mathrm{Im}(z) = -11$

Exercice 4. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{1-\mathbf{i}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$
2. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i}+2} = \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}\mathbf{i}$
3. $z = \dfrac{1}{4-3\mathbf{i}} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}\mathbf{i}$
4. $z = \dfrac{4-6\mathbf{i}}{3+2\mathbf{i}} = -2\mathbf{i}$
5. $z = \dfrac{5+15\mathbf{i}}{\mathbf{i}} = 15-5\mathbf{i}$
6. $z = \dfrac{1+2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathbf{i}$
7. $z = \left(\dfrac{1-\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}\right)\left(\dfrac{3+\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right) = \frac{8}{13} - \frac{14}{13}\mathbf{i}$

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 5. *Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$.*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1+\mathbf{i})z = 3-\mathbf{i} \iff z = \dfrac{3-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} \iff z = 1-2\mathbf{i}$
   $\mathscr{S} = \{1-2\mathbf{i}\}$.
2. $2z+1-\mathbf{i} = \mathbf{i}z+2 \iff z = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}} \iff z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{i}$
   $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{i}\right\}$.
3. $(2z+1-\mathbf{i})(\mathbf{i}z+3) = 0 \iff z = \frac{-1+\mathbf{i}}{2}$ ou $z = -\frac{3}{\mathbf{i}}$
   $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ ;\ 3\mathbf{i}\right\}$
4. Soit $z \neq 1$, $\quad \dfrac{z+1}{z-1} = 2\mathbf{i} \iff z+1 = 2\mathbf{i}(z-1) \iff z = \frac{-1-2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}}$
   $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathbf{i}\right\}$
5. $(\mathbf{i}z+1)(z+3\mathbf{i})(z-1+4\mathbf{i}) = 0 \iff z = -\frac{1}{\mathbf{i}}$ ou $z = -3\mathbf{i}$ ou $z = 1-4i$
   $\mathscr{S} = \{\mathbf{i}; -3\mathbf{i}; 1-4\mathbf{i}\}$

Exercice 6. *Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$
   $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}\right\}$.
2. $z^2 - 5z + 9 = 0$
   $\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\mathbf{i}; \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\mathbf{i}\right\}$.
3. $z^2 - 2z + 3 = 0$
   $\mathscr{S} = \left\{1+\sqrt{2}\mathbf{i}; 1-\sqrt{2}\mathbf{i}\right\}$.
4. $z^2 = z + 1$
   $\mathscr{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
5. $z^2 + 3 = 0$
   $\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{3}\mathbf{i}; \sqrt{3}\mathbf{i}\right\}$.
6. $z^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)z + 2\left(\sqrt{2}+2\right) = 0$
   $\mathscr{S} = \left\{1+\sqrt{2}+\mathbf{i}; 1+\sqrt{2}-\mathbf{i}\right\}$.

Exercice 7. *Changement de variables / Recherche d'une solution évidente et division euclidienne*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0 \iff z^2 = -1$ ou $z^2 = -2$
   $\mathscr{S} = \left\{\mathbf{i}; -\mathbf{i}; \sqrt{2}\mathbf{i}; -\sqrt{2}\mathbf{i}\right\}$.
2. $z^4 - 32z^2 - 144 = 0 \iff z^2 = 36$ ou $z^2 = -4$
   $\mathscr{S} = \{6; -6; 2\mathbf{i}; -2\mathbf{i}\}$.
3. $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0 \iff (z-1)(z^2-5z+7) = 0 \iff z = 1$ ou $z^2 - 5z + 7 = 0$
   $\mathscr{S} = \left\{1; \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}; \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right\}$.
4. $z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff (z+1)(z^2+1) = 0 \iff z = -1$ ou $z^2 = -1$
   $\mathscr{S} = \{-1; \mathbf{i}; -\mathbf{i}\}$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exercice 8. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = 2 + 2\mathbf{i}\sqrt{3} = 4e^{\mathbf{i}\pi/3}$
2. $z = -\sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2} = 2e^{\mathbf{i}3\pi/4}$
3. $z = 4 - 4\mathbf{i} = 4\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\pi/4}$
4. $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}e^{\mathbf{i}2\pi/3}$
5. $z = -2\mathbf{i} = 2e^{-\mathbf{i}\pi/2}$
6. $z = \dfrac{4}{1-\mathbf{i}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\pi/4}} = 2\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\pi/4}$

Exercice 9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = (1-\mathbf{i})^6 = \left(\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\pi/4}\right)^6 = 8e^{-\mathbf{i}3\pi/2}$
2. $z = \dfrac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{2e^{-\mathbf{i}\pi/3}}{\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-\mathbf{i}7\pi/12}$
3. $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)^9}{(1+\mathbf{i})^{12}} = \dfrac{\left(2e^{\mathbf{i}\pi/6}\right)^9}{\left(\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\pi/4}\right)^{12}} = 2^3e^{\mathbf{i}(3\pi/2-3\pi)} = 8e^{-\mathbf{i}3\pi/2}$
4. $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = 3e^{\mathbf{i}\pi/5}$
5. $z = 2\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + \mathbf{i}\cos\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right) = 2e^{\mathbf{i}\pi/3}$.
6. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{5}) + \mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{5})\right) = 2e^{-\mathbf{i}\pi/5}$.

Exercice 10. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = 2e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathbf{i}$.
2. $z = \left(\sqrt{8}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}\right)\left(\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}\right) = 4e^{\mathbf{i}(-\pi/6+\pi/3)} = 4e^{\mathbf{i}\pi/6}$.
3. $z = \dfrac{6}{e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}} = 6e^{-\mathbf{i}\pi/3} = 6\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right) = 3 - 3\sqrt{3}\mathbf{i}$.
4. $z = 3\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} = 3e^{\mathbf{i}(\pi/2+\pi/3)} = 3e^{\mathbf{i}(5\pi/6)} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathbf{i}$.

Divers

Exercice 11. Soit z un complexe différent de 2. On pose $z' = \dfrac{\mathbf{i}z}{z-2}$. Montrer que

z' est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

Soit $z = x + \mathbf{i}y$ avec x, y des réels.

Alors

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\mathbf{i}z}{z-2} \\ &= \frac{\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)}{(x-2)+\mathbf{i}y} \\ &= \frac{-y+\mathbf{i}x}{(x-2)+\mathbf{i}y} \times \frac{(x-2)-\mathbf{i}y}{(x-2)-\mathbf{i}y} \\ &= \frac{-y(x-2)+xy+\mathbf{i}\left(x(x-2)+y^2\right)}{(x-2)^2+y^2} \\ &= \frac{2y}{(x-2)^2+y^2} + \mathbf{i}\frac{x(x-2)+y^2}{(x-2)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} z' \text{ est un imaginaire pur} &\iff \operatorname{Re}(z') = 0 \\ &\iff \frac{2y}{(x-2)^2+y^2} = 0 \\ &\iff 2y = 0 \\ &\iff y = 0 \\ &\iff z = x + \mathbf{i} \times 0 \\ &\iff z \text{ est réel.} \end{aligned}$$

Exercice 12. *Relations coefficients/racines*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

d'inconnue (z_1, z_2).

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_1 \times z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases} &\iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines de l'équation } z^2 - 2z + 5 = 0 \\ &\iff \begin{cases} z_1 = 1 + 2\mathbf{i} \\ z_2 = 1 - 2\mathbf{i} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z_1 = 1 - 2\mathbf{i} \\ z_2 = 1 + 2\mathbf{i} \end{cases}. \end{aligned}$$