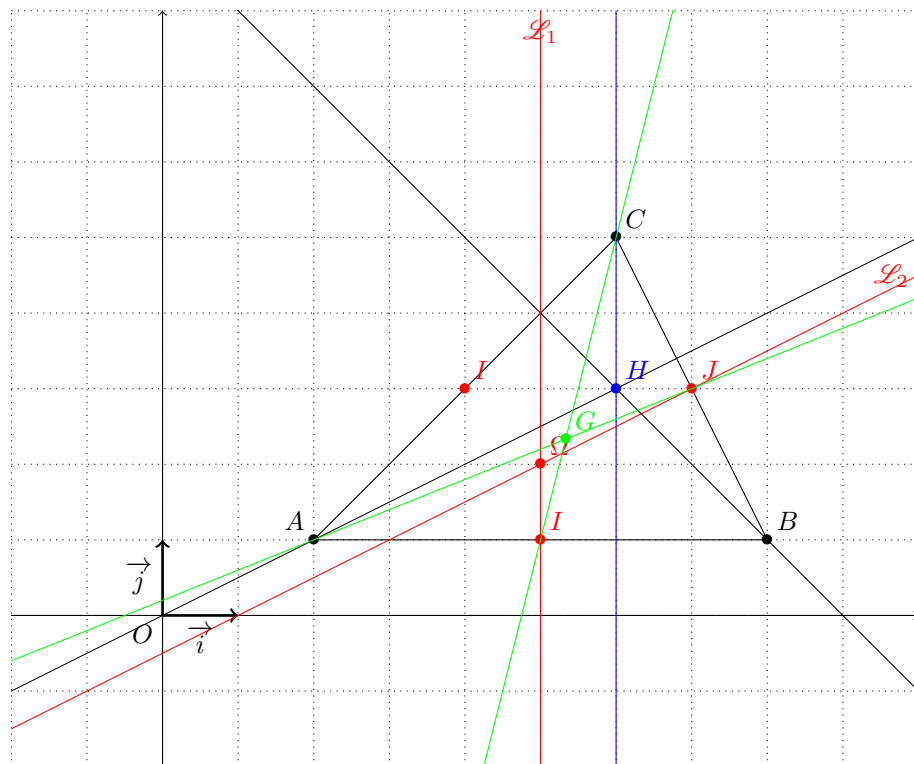


Devoir à la maison n°1 – Correction

Droites remarquables du triangle

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. On considère le triangle suivant :



Hauteurs du triangle ABC

L'objectif de cette partie est de montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H .

1. Quelles sont les coordonnées des points A , B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?
 $A(2,1)$ $B(8,1)$ $C(6,5)$.

2. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x - 2y = 0$.

- (a) Vérifier que le point A appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.

$$x_A - 2y_A = 2 - 2 \times 1 = 0 \text{ donc } A \in \mathcal{D}_1.$$

- (b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$, que l'on note $\vec{n}_1$.

$$\vec{n}_1(1, -2).$$

- (c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC}(x_C - x_B, y_C - y_B) \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{BC}(-2, 4).$$

- (d) Calculer $[\overrightarrow{BC}, \vec{n}_1]$.

$$[\overrightarrow{BC}, \vec{n}_1] = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

- (e) En déduire que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue du sommet A .

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires (car $[\overrightarrow{BC}, \vec{n}_1] = 0$). Les droites (BC) et $\mathcal{D}_1$ sont donc perpendiculaires. De plus $A \in \mathcal{D}_1$. On en déduit la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue du sommet A .

3. On note $\mathcal{D}_2$ la hauteur issue de B .

- (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}(4, 4).$$

(b) En déduire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$ est $4x+4y+c=0$ avec c à déterminer.
 $B \in \mathcal{D}_2$ donc $c = -4x_B - 4y_B$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$ est $x+y-9=0$.

4. Intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

(a) Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

On note $\vec{n}_2(1,1)$. Il s'agit un vecteur normal à $\mathcal{D}_2$. On vérifie que $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$. On en déduit que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

(b) On note $H(x_H, y_H)$ le point d'intersection des deux hauteurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Déterminer les coordonnées de H .

$$H \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \iff \begin{cases} x_H - 2y_H = 0 \\ x_H + y_H = 9 \end{cases} \iff x_H = 6 \text{ et } y_H = 3.$$

Conclusion : $H(6, 3)$.

5. On note $\mathcal{D}_3$ la hauteur issue de C .

(a) Tracer $\mathcal{D}_3$ sur la figure (annexe).

(b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_3$.

$\vec{n}_3 = \vec{AB}(6,0)$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_3$ est $6x+0y+c=0$ avec c à déterminer. $C \in \mathcal{D}_3$ donc $c = -6x_C$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathcal{D}_3$ est $x-6=0$.

(c) Vérifier que le point H appartient aussi à la droite $\mathcal{D}_3$.

On a bien $x_H - 6 = 0$, donc $H \in \mathcal{D}_3$.

(d) Conclure.

On a $H \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$. Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont donc concourantes en H , ie les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H .

Centre du cercle circonscrit au triangle ABC

On admet que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de Ω , centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

On note I, J, K les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

6. Placer les points I, J et K sur la figure (annexe) et déterminer leurs coordonnées par le calcul.

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ donc $I(5,1)$. De manière similaire, on trouve $J(7,3)$ et $K(4,3)$.

7. On note $\mathcal{L}_1$ la médiatrice du segment $[AB]$. Tracer la droite $\mathcal{L}_1$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{L}_1$.

$\vec{AB}(6,0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{L}_1$ et $I \in \mathcal{L}_1$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathcal{L}_1$ est $x-5=0$.

8. On note $\mathcal{L}_2$ la médiatrice du segment $[BC]$. Tracer la droite $\mathcal{L}_2$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{L}_2$.

$\vec{BC}(-2,4)$ est un vecteur normal à $\mathcal{L}_2$ et $J \in \mathcal{L}_2$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathcal{L}_2$ est $x-2y-1=0$.

9. On note Ω le point d'intersection des droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Déterminer les coordonnées de Ω .

On note (x,y) les coordonnées de Ω .

$$\Omega \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \iff \begin{cases} x-5=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \iff x=5 \text{ et } y=2.$$

Conclusion : $\Omega(5,2)$.

Centre de gravité et alignement

On admet que les médianes d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de G , centre de gravité du triangle ABC .

On admet que les médianes d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de G , centre de gravité du triangle ABC .

10. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$. Que peut-on en déduire?

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

11. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AJ) .

$\vec{AJ}(5, 2)$ donc $\vec{n}_{(AJ)}(-2, 5)$ est un vecteur normal à (AJ) . Une équation de (AJ) est $-2x + 5y + c = 0$ avec c à déterminer en injectant les coordonnées de A .

Conclusion : Une équation cartésienne de (AJ) est $-2x + 5y - 1 = 0$.

12. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CI) .

$\vec{CI}(-1, -4)$ donc $\vec{n}_{CI}(4, -1)$ est un vecteur normal à (CI) . Une équation de (CI) est $4x - y + c = 0$ avec c à déterminer en injectant les coordonnées de C .

Conclusion : Une équation cartésienne de (CI) est $4x - y - 19 = 0$.

13. Déterminer les coordonnées du point G , centre de gravité du triangle ABC .

On note (x, y) les coordonnées de G .

$$G \in (AJ) \cap (CI) \iff \begin{cases} -2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x - y - 19 = 0 \end{cases} \iff x = \frac{16}{3} \text{ et } y = \frac{7}{3}.$$

Conclusion : $G \left(\frac{16}{3}, \frac{7}{3} \right)$.

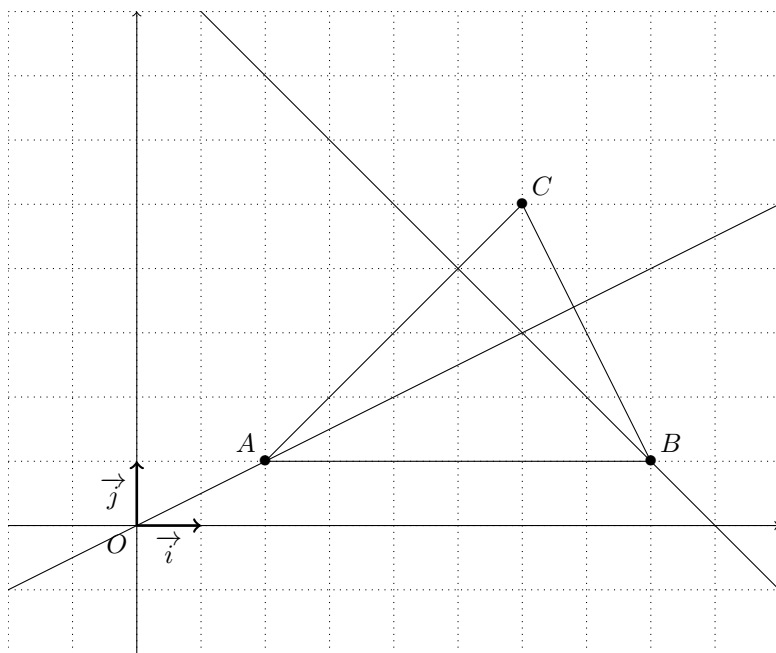
14. Montrer que les points H , Ω et G sont alignés.

$$[\vec{H\Omega}, \vec{HG}] = \begin{vmatrix} 5-6 & \frac{16}{3}-6 \\ 2-3 & \frac{7}{3}-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0 \text{ donc les points } H, \Omega \text{ et } G \text{ sont alignés.}$$

Devoir non surveillé

Droites remarquables du triangle

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. On considère le triangle suivant :



Hauteurs du triangle ABC

L'objectif de cette partie est de montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H .

1. Quelles sont les coordonnées des points A , B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

2. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x - 2y = 0$.
 - (a) Vérifier que le point A appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.
 - (b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$, que l'on note $\vec{n}_1$.
 - (c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
 - (d) Calculer $[\overrightarrow{BC}, \vec{n}_1]$.
 - (e) Que peut-on en déduire ?
3. On note $\mathcal{D}_2$ la hauteur issue de B .
 - (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
 - (b) En déduire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.
4. Intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
 - (a) Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.
 - (b) On note $H(x_H, y_H)$ le point d'intersection des deux hauteurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
Déterminer les coordonnées de H .
5. On note $\mathcal{D}_3$ la hauteur issue de C .
 - (a) Tracer $\mathcal{D}_3$ sur la figure (annexe).
 - (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_3$.
 - (c) Vérifier que le point H appartient aussi à la droite $\mathcal{D}_3$.
 - (d) Conclure.

Centre du cercle circonscrit au triangle ABC

On admet que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de Ω , centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

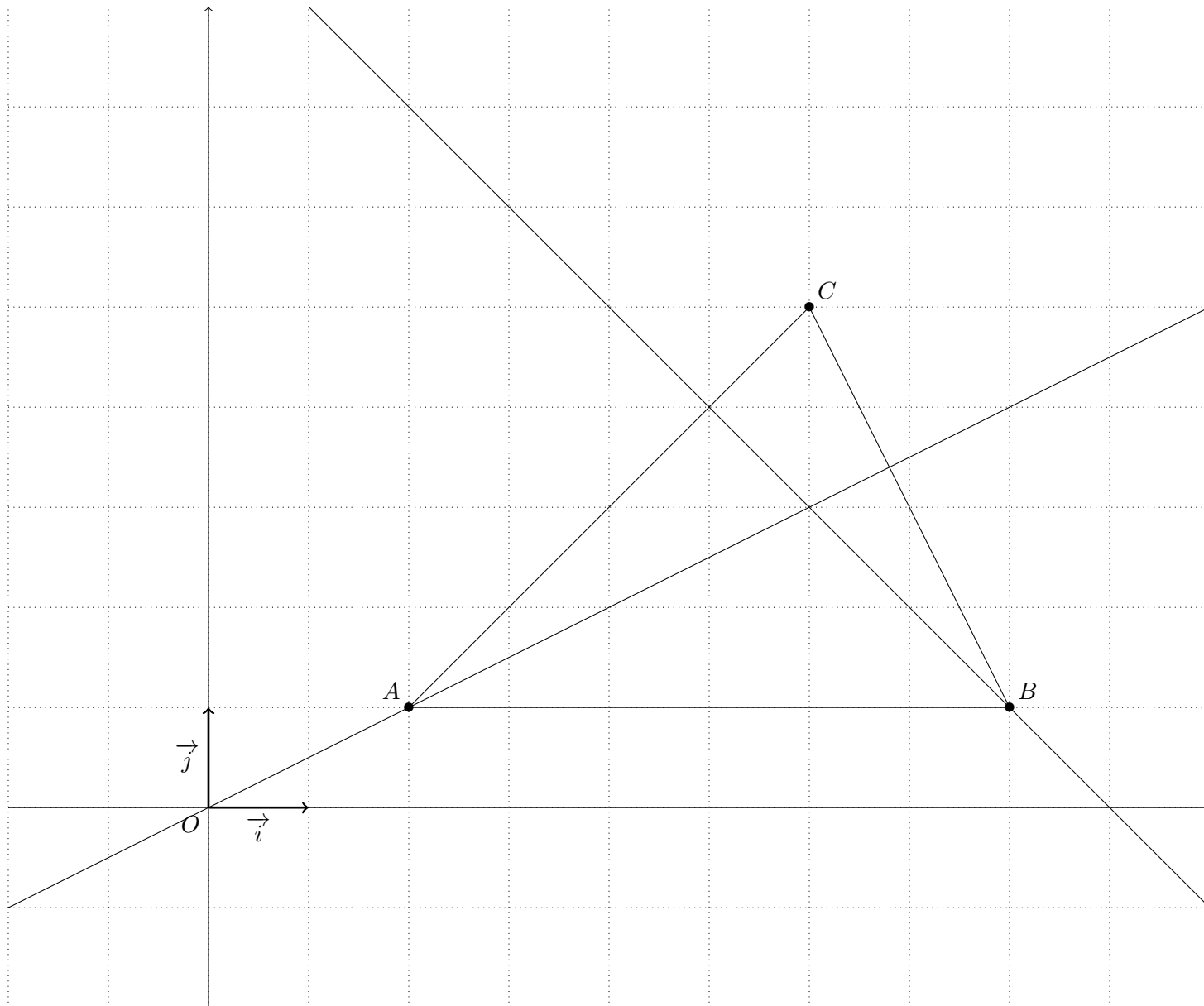
On note I, J, K les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

6. Placer les points I, J et K sur la figure (annexe) et déterminer leurs coordonnées par le calcul.
7. On note $\mathcal{L}_1$ la médiatrice du segment $[AB]$. Tracer la droite $\mathcal{L}_1$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{L}_1$.
8. On note $\mathcal{L}_2$ la médiatrice du segment $[BC]$. Tracer la droite $\mathcal{L}_2$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{L}_2$.
9. On note Ω le point d'intersection des droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Déterminer les coordonnées de Ω .

Centre de gravité et alignement

On admet que les médianes d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de G , centre de gravité du triangle ABC .

10. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$.
Que peut-on en déduire ?
11. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AJ) .
12. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CI) .
13. Déterminer les coordonnées du point G , centre de gravité du triangle ABC .
14. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

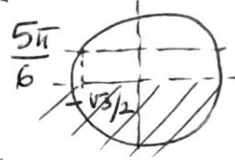


DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

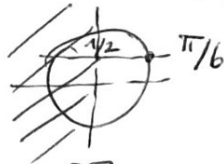
Fonctions trigonométriques réciproques

CORRECTION.

$$\textcircled{1} \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

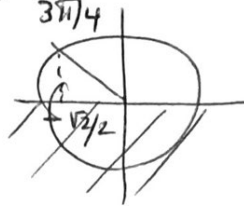


$$\operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

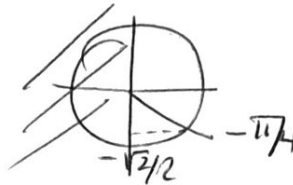


$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$



$$\operatorname{arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$



Exercice 2.

①. Remarquer que montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

c'est montrer que $\arccos(1) < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\text{On a } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < 1$$

$$\text{donc } \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \arccos\left(\frac{3}{4}\right) > \arccos(1)$$

car $x \mapsto \arccos(x)$ est strictement décroissante

$$\text{Ainsi } \boxed{\frac{\pi}{4} > \arccos\left(\frac{3}{4}\right) > 0}.$$

$$\textcircled{2} \quad \arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \cos\left(2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) \quad \text{car } 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \in [0, \pi] \text{ d'après Question 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{I = \left\{ \frac{1}{8} \right\}}$$

Séance

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1. À l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminer :

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(-1), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 2. 1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}.$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 3. 1. Montrer que $2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\sin(2t) = \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}.$$

3. En déduire que

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Exercice 4. 1. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}.$$

2. Montrer que : $\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Ainsi $0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$.

3. Résoudre $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$.

Indication : On rappelle que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

DM n°3

Équations différentielles

On considère les équations différentielles suivantes :

$$xy' - (x+1)y = 0 \quad (E_1)$$

et

$$xy'' - (5x+1)y' + (6x+2)y = 0 \quad (E_2)$$

sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Déterminer a et b des réels tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{x+1}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

2. Résoudre (E_1) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $\varphi(x) = e^{2x}$.
Montrer que φ est une solution de (E_2) sur $]0; +\infty[$.
4. Soit $\mathbf{u}(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
On pose, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x)e^{2x}.$$

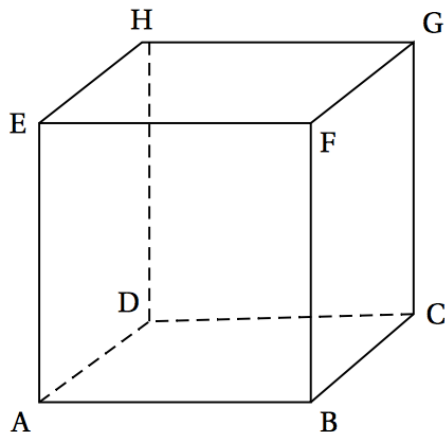
Montrer que $\mathbf{v}(x)$ est solution de (E_2) si et seulement si $\mathbf{u}'(x)$ est une solution de (E_1) .

5. Résoudre (E_2) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Géométrie élémentaire de l'espace

Exercices supplémentaires

Exercice 1. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal

$$\mathcal{R} = (D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}).$$

1. On note K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

- Montrer que les coordonnées du point K dans $\mathcal{R}$ sont $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.
- Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
- Calculer la distance EK .

2. Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

- Montrer que, pour tout m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
- Déterminer une équation cartésienne du plan (MFD) .
- On note d_m la distance du point E au plan (MFD) . Montrer que pour tout $m \in [0; 1]$,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

- Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.
- En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD) .

3. On note $\mathcal{S}$ la sphère de centre M et de rayon $r = \sqrt{2}$.

- Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
- On note M' le projeté orthogonal du point M sur le plan (AFG) . Déterminer les coordonnées du point M' .
- Montrer que quel que soit $m \in [0; 1]$, M' appartient à une droite dont on déterminera un système d'équations cartésiennes.
- Déterminer l'intersection $(AFG) \cap \mathcal{S}$.
- Déterminer l'intersection $(HG) \cap \mathcal{S}$.

Exercice 2. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation : $y + z = 0$. On considère la famille de plans

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1,$$

où $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que quel que soit le réel m , la droite $\mathcal{D}$ n'est jamais perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_m$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}_m$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
3. Montrer que pour tout réel m , l'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{Q}$ est un point I_m dont on déterminera les coordonnées dans $\mathcal{R}$.
4. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre, ainsi que son rayon.
5. (a) Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.
 (b) Montrer que quel que soit le réel m , I_m appartient à $\mathcal{C}$.

DEVOIR MAISON N°5 – Correction

Mathématiques

Question 1a :

Par comparaison, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Question 1b :

f est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1$.

Soit $x \in [0, +\infty[$,

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0$$

$$\iff x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$\iff x = 2 \quad \text{car } x \in [0, +\infty[$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		$-\frac{1}{3}$	

Question 2a :

Application du théorème de la bijection :

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$, donc f réalise une bijection de l'intervalle $[0, 2]$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ (qui contient 0). Il existe donc une unique $\beta \in [0, 2]$ tel que $f(\beta) = 0$.

De même, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]2, +\infty[$, f réalise une bijection de l'intervalle $]2, +\infty[$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ (qui contient 0). Il existe donc un unique $\gamma \in]2, +\infty[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Conclusion : f s'annule exactement deux fois : une première fois en β qui appartient à l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois en γ qui appartient à l'intervalle $]2, +\infty[$.

Question 2b :

On sait que $f(\beta) = 0$, donc $\frac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0$ et donc $1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta$.

Question 2c :

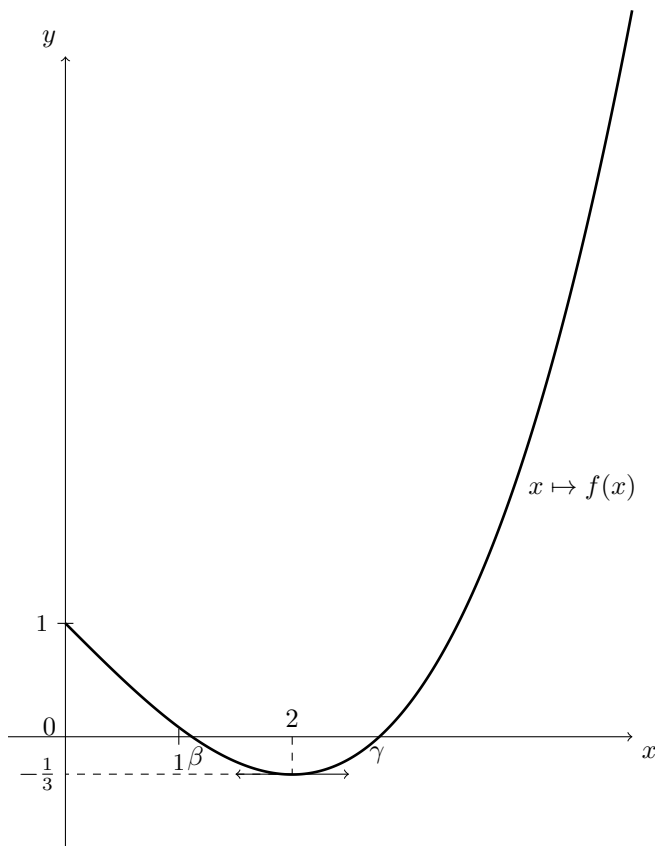
$f(1) = 0,08 > 0$ et $f(1,2) \simeq -0,06 < 0$ donc $\beta \in]1; 1,2[$.

De même, $f(2,7) \simeq -0,06 < 0$ et $f(2,8) \simeq 0,03 > 0$ donc $\gamma \in]2,7; 2,8[$.

Question 2d :

x	0	β	γ	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0
			+	

Question 3 :



Question 4a :

$$u_1 = 1 + \frac{u_0^3}{12} = \frac{13}{12}$$

Récurrence : On pose $\mathcal{H}_n : u_n \in [0, \beta]$.

$u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0, \beta]$ d'après la question 2c. $\mathcal{H}_0$ est donc vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

$0 \leq u_n \leq \beta \implies 0 \leq u_n^3 \leq \beta^3$ (car la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$)

$$\implies 0 \leq \frac{u_n^3}{12} \leq \frac{\beta^3}{12}$$

$$\implies 1 \leq 1 + \frac{u_n^3}{12} \leq 1 + \frac{\beta^3}{12}$$

$$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq \beta \quad (\text{d'après le résultat de la question 2b})$$

Ainsi $u_{n+1} \in [1, \beta]$, or $[1, \beta] \subset [0, \beta]$, donc $u_{n+1} \in [0, \beta]$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \beta]$

Question 4b :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n^3}{12} - u_n$ et $f(u_n) = \frac{u_n^3}{12} - u_n + 1$, donc

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n).$$

or $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après la question précédente) et f est positive sur l'intervalle $[0, \beta]$ (d'après la question 2d). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geq 0$.

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

Question 4c :

On a montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par β . La suite (u_n) est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim u_n$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12}$. Par passage à la limite, on a $\ell = 1 + \frac{\ell^3}{12}$, donc $\frac{\ell^3}{12} - \ell + 1 = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. Ainsi $\ell = \beta$ ou $\ell = \gamma$

(d'après 2a). De plus $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \in [0, \beta]$ par passage à la limite. Finalement $\ell = \beta$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers β .

Question d :

```
10 def u(n):
11     resu=1.0
12     i=0
13     if n==0:
14         return resu
15     else :
16         while i<n :
17             resu=float(resu**3)/12+1
18             i+=1
19         return resu
20
21 """ Alternative récursivité :
22
23 def u(n):
24     if n==0:
25         return 1
26     else :
27         return float(u(n-1)**3)/12+1
28
29 """
30
31
32 N=int(input("Entrer la valeur de N : "))
33
34 print(u(N))
```

DM5 : Suites récurrentes

À rendre avant le lundi 18/03/2024

CALCULATRICE AUTORISÉE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

CONSIGNES :

1. Faire le DM5 sur feuille, comme vous le rédigeriez en DS, sans inscrire son nom et son prénom (votre copie doit rester anonyme).
2. Télécharger une application du type Genius Scan sur votre téléphone.
3. Scanner votre production et l'exporter au format pdf (attention à ne générer qu'un pdf seulement).
4. Renommer ce pdf NOM_DM5.pdf :
Au hasard, Yacouba nommera son fichier MAGASSA_DM5.pdf (respecter ce formalisme).
5. Déposer ce pdf via moodle sur monbureau numerique avant lundi 18/03/2024.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$.

1.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f .
2.
 - a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.
On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.
 - b) Simplifier l'expression $1 + \frac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).
 - c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $]1; 1,2[$ et que γ appartient à $]2,7; 2,8[$.
 - d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.
4. On cherche à obtenir une approximation de β . À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12} \end{cases}$$

- a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.
- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.
Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β .
- d) Écrire dans le langage de votre choix (Python ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N .

DM6 - Correction.

Données $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

Conclusion: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 = -A$

1.2. $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$ donc $4A = M - I_3$
donc $M = I_3 + 4A$

1.3. $M^0 = I_3 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$.
 $M^1 = I_3 + 4A = I_3 + u_1 A$ avec $u_1 = 4$
 $M^2 = (I_3 + 4A)^2 = I_3 + 8A + 16A^2$ car $AI = IA$
 $= I_3 + 8A - 16A$ car $A^2 = -A$
 $= I_3 - 8A$
 $= I_3 + u_2 A$ avec $u_2 = -8$.

Conclusion: $M^0 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$
 $M^1 = I_3 + u_1 A$ avec $u_1 = 4$
 $M^2 = I_3 + u_2 A$ avec $u_2 = -8$

1.4. H_n : "il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$ "

H_0 est vraie: $M^0 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie:

Il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$

$$M^{n+1} = M^n \times M$$

$$= (I_3 + u_n A)(I_3 + 4A) \quad \text{d'après } H_n$$

$$= I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2$$

$$= I_3 + 4A + u_n A - 4u_n A \quad \text{car } A^2 = -A$$

$$= I_3 + (4 + u_n - 4u_n)A$$

$$= I_3 + (4 - 3u_n)A$$

$$= I_3 + u_{n+1} A \quad \text{avec } u_{n+1} = 4 - 3u_n$$

Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tq $M^n = I_3 + u_n A$

Données: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4 - 3u_n \end{cases}$

$v_n = u_n - 1$.

1.5.1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$
 $= 4 - 3u_n - 1$
 $= 3 - 3u_n$
 $= 3(1 - u_n)$
 $= 3 \times (-v_n)$
 $= -3v_n$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = -3v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -3$

1.5.2, $v_0 = u_0 - 1 = -1$.
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -1 \times (-3)^n$
 Ccl: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1) \times (-3)^n$

1.5.3, On sait que $v_n = u_n - 1$
 Donc $u_n = v_n + 1$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1) \times (-3)^n + 1$.

1.6, $M^n = I_3 + u_n A$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + u_n \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1-2u_n & 0 & -2u_n \\ u_n & 1 & u_n \\ u_n & 0 & 1+u_n \end{pmatrix}$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$

$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$

2.1, $M = 4J - 3I_3 \iff 4J = M + 3I_3$
 $\iff J = \frac{1}{4}(M + 3I_3)$

Ccl: Il existe une unique matrice J tq $M = 4J - 3I_3$:
 $J = \frac{1}{4}(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.2, $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$
 Ccl: $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = J$.

2.3.1, Soient $A, B \in M_3(\mathbb{R})$
 Si $AB = BA$, alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

2.3.2, $M = 4J - 3I_3$
 On a $(4J)(-3I_3) = -12J = (-3I_3)(4J)$
 Donc $M^n = (4J + (-3I_3))^n$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k}$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I_3^{n-k}$
 $= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k$
 $= \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k$
 $= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J$

car $J^k = J$
 pour $k \geq 1$.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J$

$$(2.3.3) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = (4 + (-3))^n = 1^n = 1$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \\ = (-3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}$$

$$\text{Donc } (-3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1$$

$$\text{D'où } \boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

$$(2.3.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J$$

$$M^n = (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$(2.4) \quad \text{Pour } n=0 :$$

$$\begin{pmatrix} 2(-3)^0 - 1 & 0 & 2(-3)^0 - 2 \\ 1 - (-3)^0 & 1 & 1 - (-3)^0 \\ 1 - (-3)^0 & 0 & 2 - (-3)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = M^0$$

L'égalité est encore vérifiée en $n=0$.

$$\text{Al : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

DM6 : Puissances d'une matrice

À rendre avant le lundi 25/03/2024

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

CONSIGNES :

1. Faire le DM6 sur feuille, comme vous le rédigeriez en DS, sans inscrire son nom et son prénom (votre copie doit rester anonyme).
2. Télécharger une application du type Genius Scan sur votre téléphone.
3. Scanner votre production et l'exporter au format pdf (attention à ne générer qu'un pdf seulement).
4. Renommer ce pdf NOM_DM6.pdf :
Au hasard, Maël nommera son fichier VIGNOLI_DM6.pdf (respecter ce formalisme).
5. Déposer ce pdf via moodle sur monbureau numerique avant lundi 25/03/2024.

Problème : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M .

Considérons la matrice A définie par : $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1.1 Calculer A puis A^2 .

1.2 Exprimer la matrice M en fonction de la matrice A .

1.3 Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$.

Nous rappelons que : $M^0 = I_3$.

1.4 Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$.

La preuve mettra en avant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 4$.

1.5 Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1$.

1.5.1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

1.5.2 En déduire pour tout entier naturel n , une expression de v_n en fonction de n .

1.5.3 En déduire alors, pour tout entier naturel n , une expression de u_n en fonction de n .

1.6 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M .

2.1 Montrer qu'il existe une unique matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M = 4J - 3I_3$.

2.2 Calculer J^2 , puis pour tout entier naturel non nul n , J^n .

2.3 Soit n un entier naturel non nul.

2.3.1 Énoncer la formule du binôme.

2.3.2 Montrer que : $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J$.

2.3.3 Montrer que : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.

2.3.4 En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J ,
puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2.4 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

DM7 - Correction.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1a. \quad B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$1b. \quad B^2 = 0 \quad \text{donc} \quad (A - I_3)^2 = 0$$

$$\text{donc} \quad A^2 - 2AI_3 + I_3^2 = 0$$

$$\text{car} \quad A \times (-I_3) = (-I_3)A$$

$$\text{donc} \quad \boxed{A^2 - 2A + I_3 = 0}$$

$$2. \quad P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

$$\boxed{1 \text{ est une racine double de } P(X)}$$

$$3a. \quad \text{Il existe } Q_n(X) \text{ et } R_n(X) \text{ uniques}$$

$$\text{appartenant à } \mathbb{R}[X] \text{ tels que}$$

$$X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$$

$$\text{et } \deg(R_n(X)) < \deg(P(X)).$$

$$b. \quad \deg(R_n(X)) < 2 \quad \text{donc} \quad R_n(X) = a_n X + b_n$$

$$\text{avec } a_n, b_n \text{ des réels}$$

$$\text{Ainsi } \underline{X^n = (X-1)^2 Q_n(X) + a_n X + b_n.} \quad (1)$$

En dérivant cette relation, on obtient

$$\underline{n X^{n-1} = 2(X-1)Q_n(X) + (X-1)^2 Q_n'(X) + a_n} \quad (2)$$

En évaluant les relations (1) et (2) en 1, on obtient :

$$\begin{cases} 1 = 0 \times Q_n(1) + a_n + b_n \\ n = 2 \times 0 \times Q_n(1) + 0 \times Q_n'(1) + a_n \end{cases}$$

$$\text{D'où } a_n = n \quad \text{et} \quad b_n = 1 - n.$$

$$\text{Conclusion: } \boxed{R_n(X) = nX + (1-n)} \quad (3)$$

4. On a montré que

$$\underline{X^n = (X^2 - 2X + 1)Q_n(X) + nX + (1-n)}$$

En évaluant cette relation en A, on obtient

$$A^n = (A^2 - 2A + I_3)Q_n(A) + nA + (1-n)I_3$$

$$\text{or } A^2 - 2A + I_3 = 0$$

$$\text{donc } \underline{A^n = nA + (1-n)I_3}$$

$$\text{D'où } A^n = n \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 5 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3n+1 & -15n & 3n \\ n & 1-5n & n \\ 2n & -10n & 4n+1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

5. Autre méthode: Binôme de Newton

$$B = A - I_3 \text{ et } B^2 = 0$$

$$\text{Donc } A = B + I_3 \text{ or } B \times I_3 = I_3 \times B$$

$$\text{Donc } A^n = (B + I_3)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k$$

$$= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 \text{ pour } n \geq 1$$

$$(\text{car } B^k = 0 \forall k \geq 2)$$

$$= I_3 + nB$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 & -15 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3n & -15n & 3n \\ n & 1-5n & n \\ 2n & -10n & 1+4n \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion: } A^n = \begin{pmatrix} 1+3n & -15n & 3n \\ n & 1-5n & n \\ 2n & -10n & 4n+1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$$

(la formule étant encore vérifiée en $n=0$)

Calculer $\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$.

$$\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$$

$$= \left[\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} x (x-b)^n \right]_a^b - \int_a^b \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} x^n (x-b)^{n-1} dx \text{ par IPP}$$

$$= - \frac{n}{n+1} \int_a^b (x-a)^{n+1} (x-b)^{n-1} dx$$

$$= - \frac{n}{n+1} \left(\left[\frac{(x-a)^{n+2}}{n+2} (x-b)^{n-1} \right]_a^b - \int_a^b \frac{(x-a)^{n+2}}{n+2} x^{n-1} (x-b)^{n-2} dx \right) \# \text{ seconde IPP}$$

$$= (-1)^2 \frac{n \times (n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_a^b (x-a)^{n+2} (x-b)^{n-2} dx$$

= ...

$$= (-1)^n \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{(n+1)(n+2) \times \dots \times 2n} \int_a^b (x-a)^{2n} dx$$

$$= (-1)^n \frac{n! \times n!}{n! (n+1)(n+2) \times \dots \times 2n} \left[\frac{(x-a)^{2n+1}}{2n+1} \right]_a^b$$

$$= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}.$$

après n IPP successives

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}$$

DM7 : Matrices et polynômes

À rendre avant le lundi 01/04/2024

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction :**

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. **De la présentation :**

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

CONSIGNES :

1. Faire le DM7 sur feuille, comme vous le rédigeriez en DS, sans inscrire son nom et son prénom (votre copie doit rester anonyme).
2. Télécharger une application du type Genius Scan sur votre téléphone.
3. Scanner votre production et l'exporter au format pdf (attention à ne générer qu'un pdf seulement).
4. Renommer ce pdf NOM_DM7.pdf
5. Déposer ce pdf via moodle sur monbureau numerique avant lundi 01/04/2024.

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On pose $B = A - I_3$.
 - a. Calculer B^2 .
 - b. En déduire une relation entre A^2 , A et I_3 .
2. On considère le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les racines de P .
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P , dont le reste sera noté R_n .
 - b. Déterminer R_n .
4. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$;
5. Proposer une autre méthode pour déterminer A^n .

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

Calculer $\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$.

Devoir à la maison n°8 – Correction

Exercice 1. On note

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (-(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), -6(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y') + 2(\lambda z + z'), 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ &= \lambda(-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z) + (-x' + y' + z', -6x' + 4y' + 2z', 3x' - y' + z') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $X' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

$$\begin{aligned} A &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Montrer que $f \circ f = 2f$.

$$\begin{aligned} A \times A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2A. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= A \times A \\ &= 2A \\ &= 2\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(2f),\end{aligned}$$

on en déduit, par unicité de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, que $f \circ f = 2f$.

4. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$. Interpréter le résultat. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -x + y + \boxed{z} = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y + \boxed{z} = 0 \\ -4x + 2\boxed{y} = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y + \boxed{z} = 0 \\ -2x + \boxed{y} = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (x, 2x, -x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Une base de $\text{Ker}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. Comme $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 0$, on en déduit que l'application f n'est pas injective.

Dans la suite, on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. En déduire le rang de f . Interpréter le résultat.
D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Ainsi

$$\text{rg}(f) = 2.$$

Comme $\text{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. L'application f n'est donc pas surjective.

6. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Une base de $\text{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Dans la suite, on pose $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la réunion des bases de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$. La famille

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre constituée de trois

vecteurs (le démontrer) et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

8. On note $\mathcal{F}$ la famille (u, v, w) .

Montrer que $\mathcal{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre constituée de 3 vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on peut conclure que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

9. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer P , ainsi que P^{-1} .

Par définition, on a

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & | & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. Rappeler la formule de changement de bases et déterminer D .

D'après la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.

On a $f(u) = f(1, 2, -1) = (0, 0, 0) = 0u + 0v + 0w$,

$f(v) = f(1, 6, -3) = (2, 12, -6) = 0u + 2v + 0w$ et

$f(w) = f(1, 2, 1) = (2, 4, 2) = 0u + 0v + 2w$.

On retrouve bien

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Question déjà traitée en TD.

13. Déterminer l'expression explicite de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$A^0 = I_3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = 2^{n-1}A = 2^{n-1} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto 2P - (X-1)P'. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bien définie.

Indication : Il s'agit de montrer que si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} f(P) &= 2P - (X-1)P' \\ &= 2(aX^2 + bX + c) - (X-1)(2aX + b) \\ &= 2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX^2 - bX + 2aX + b \\ &= \underbrace{(2a+b)X + b + 2c}_{\in \mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. L'application f est donc bien définie.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrons que f est linéaire :

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= 2(\lambda P + Q) - (X-1)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda 2P + 2Q - (X-1)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda 2P - \lambda(X-1)P' + 2Q - (X-1)Q' \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
On a bien $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a $f(1) = 2 \times 1 - (X-1)[1]' = 2$,

$f(X) = 2X - (X-1)[X]' = 1 + X$,

$f(X^2) = 2X^2 - (X-1)[X^2]' = 2X$.

D'où

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

On a $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ (nombre de pivots non nuls après opérations sur

les colonnes). Comme $\text{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}_2[X])$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}_2[X]$ et f n'est pas surjective (et donc pas bijective).

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$.

Donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1 \neq 0$ et f n'est pas injective.

5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \\ &= \text{Vect}(2, 1+X, 2X) \\ &= \text{Vect}(1, 1+X, X) \\ &= \text{Vect}(1, X) \end{aligned}$$

car $1+X$ est une combinaison linéaire de 1 et de X .

Une base de $\text{Im}(f)$ est $(1, X)$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0 \\ &\iff (2a+b)X + b + 2c = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2a+b=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a=a \\ b=-2a \\ c=a \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \\ &\iff P = aX^2 - 2aX + a \text{ avec } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X^2 - 2X + 1)$ et une base de $\text{Ker}(f)$ est $(X^2 - 2X + 1)$.

6. On note $\mathcal{C} = (1, (X-1), (X-1)^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{C}$ est une famille de polynôme échelonnée en degrés, donc $\mathcal{C}$ est libre. De plus $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, donc $\mathcal{C}$ constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X-1)$ et $f((X-1)^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

On a $f(1) = 2 = 2 \times 1 + 0 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2$,

$f(X-1) = X-1 = 0 \times 1 + 1 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2$,

$f(X-1)^2 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2$.

Ainsi

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .

Par définition on a

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Quelle relation lient les matrices A , B , P et P^{-1} ?

D'après la formule de changement de bases, on a

$$B = P^{-1}AP.$$

10. Déterminer l'expression explicite de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$. Penser à traiter à part le cas $n = 0$:

$$A^0 = I_3$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problème I. Algèbre et Géométrie

$$f(P(X)) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

$$\varphi(P(X)) = \varphi(1) \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

1.

Montrons que si $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P(X)) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(P(X)) &= \frac{1}{2} \left(a\left(\frac{X}{2}\right)^2 + b\frac{X}{2} + c + a\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 + b\frac{X+1}{2} + c \right) \\ &= a\frac{X^2}{4} + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2}\right)X + c + \frac{a}{8} + \frac{b}{4} \in \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

Donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2} \left((\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) \\ &= \lambda \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire.

Remarque: f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$$

Donc φ est bien linéaire

$$3. f(1) = \frac{1}{2} [1+1] = 1.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ P(X)=1 \\ f(X) = \frac{1}{2} \left[\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} \right] = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ P(X)=X \\ f(X^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{X^2}{4} + \frac{X^2}{4} + \frac{2X}{4} + \frac{1}{4} \right] \\ \uparrow \\ P(X)=X^2 \\ = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8} \end{array}$$

$$\text{Conclusion: } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \overset{f(1)}{1} & \overset{f(X)}{1/4} & \overset{f(X^2)}{1/8} \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

$$4. \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \frac{1}{8} \neq 0$$

donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible

et $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est bijective.

Conclusion: L'application f est injective et surjective

5. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$

$$P(X) \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -b - c$$

$$\Leftrightarrow P(X) = (-b-c)X^2 + bX + c, (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow P(X) = b(-X^2 + X) + c(-X^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow P(X) \in \text{Vect}(-X^2 + X, -X^2 + 1).$$

Conclusion: $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(-X^2 + X, -X^2 + 1)$

$(-x^2+x, -x^2+1)$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(\varphi)$
 De plus, cette famille est libre (le vérifier)
 Donc $(-x^2+x, -x^2+1)$ est une base de $\text{Ker}(\varphi)$
 et $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 2$

6. $\dim(\text{Ker}(\varphi)) \neq 0$ donc $\text{Ker} \varphi \neq \{0\}$
 et φ n'est pas injective.

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\text{Ker} \varphi) + \dim(\text{Im} \varphi)$$

$$\text{donc } \dim(\text{Im} \varphi) = 1 = \dim(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } \text{Im} \varphi = \mathbb{R}$$

donc φ est surjective.

$$7. \mathcal{B}' = (1, -2x+1, 6x^2-6x+1) = (P_0(x), P_1(x), P_2(x))$$

$$\deg(P_0(x)) < \deg(P_1(x)) < \deg(P_2(x))$$

donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\text{De plus } \text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$$

donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

$$8. \varphi = {}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} P_0(x) & P_1(x) & P_2(x) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$$

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

9. $\det(Q) = -12 \neq 0$ donc Q est inversible
 Sarrus

Calcul de Q^{-1} : $L_2/(-2)$ et $L_3/6$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \end{array} \right)$$

Conclusion: $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. D'après la formule de changement de bases :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = ({}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) {}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$$= Q^{-1} A Q.$$

Conclusion: $M = Q^{-1} A Q$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 48 & 24 & 16 \\ 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Réponse :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

11. $M = Q^{-1} A Q$

donc $A = Q M Q^{-1}$

donc $A^n = (Q M Q^{-1})^n$
 $= Q M^n Q^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^n & (1/4)^n \\ 0 & -(1/2)^{n-1} & -6(1/4)^n \\ 0 & 0 & 6(1/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3-3(1/2)^n & 2-3(1/2)^n+(1/4)^n \\ 0 & 3(1/2)^{n-1} & 3(1/2)^{n-1}-6(1/4)^n \\ 0 & 0 & 6(1/4)^n \end{pmatrix}$$

12. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n = A^n$

et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n(P)) = A^n \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$
 $= A^n \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

$$f^n(P(x)) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$$

où
$$\begin{cases} \gamma_n = \frac{1}{6} (6a + (3-3(1/2)^n)b + (2-3(1/2)^n+(1/4)^n)c) \\ \beta_n = \frac{1}{6} (0 + 3(1/2)^{n-1}b + (3(1/2)^{n-1}-6(1/4)^n)c) \\ \alpha_n = (\frac{1}{4})^n c. \end{cases}$$

13. $\varphi(f^n(P(x))) = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P(x))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) = \frac{6a+3b+2c}{6}$
 (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/2)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/4)^n = 0$.)

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P(x))) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3},$

or $\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt$
 $= \left[at + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} \right]_0^1$
 $= a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.$

Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

14. $\mathcal{H}_n$: pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$

Initialisation: $n=1$.

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f^1(P) = f(P) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$$

$$\text{et } \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$$

Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\mathcal{H}_n$ est vraie.

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$f^{n+1}(P) = f^n(f(P)) \text{ par définition}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(P)\left(\frac{X+k}{2^n}\right) \text{ d'après } \mathcal{H}_n$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right) + P\left(\frac{X+k+1}{2^n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \right) \text{ par définition de } f.$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+l}{2^{n+1}}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \text{ car } 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

Conclusion: $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$

15. Somme de Riemann (résultat du cours à venir)

Si $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\text{Alors } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{k+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \phi(t) dt$$

P (fonction polynomiale) est continue sur $\mathbb{R}$

$$\text{donc } \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) dt$$

$$\text{or } \phi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) \text{ d'après Q14}$$

D'où le résultat annoncé.

Devoir à la maison - S'entraîner

Ce sujet contient deux exercices indépendants et un sujet de concours.

Je vous demande de me rendre au minimum l'un des deux exercices rédigé pour le lundi 13 mai.

Exercice 1. On note

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .
3. Montrer que $f \circ f = 2f$.
4. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$. Interpréter le résultat.

Dans la suite, on pose $u = (1, 2, -1)$.

5. En déduire le rang de f . Interpréter le résultat.
6. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Dans la suite, on pose $v = (1, 6, -3)$ et $w = (1, 2, 1)$.

7. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
8. On note $\mathcal{F}$ la famille (u, v, w) . Montrer que $\mathcal{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
9. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer P , ainsi que P^{-1} .
10. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. Rappeler la formule de changement de bases et déterminer D .
11. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.
12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
13. Déterminer l'expression explicite de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On note

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto 2P - (X - 1)P'.$$

1. Montrer que f est bien définie.
Indication : Il s'agit de montrer que si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

4. Déterminer le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?
5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
6. On note $\mathcal{C} = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X - 1)$ et $f((X - 1)^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

8. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .
9. Quelle relation lient les matrices A , B , P et P^{-1} ?
10. Déterminer l'expression explicite de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème I : Algèbre et Géométrie

A. Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(1) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

Devoir à la maison – Correction

Matrices & Applications linéaires

Exercice 1. On note

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (-(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), -6(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y') + 2(\lambda z + z'), 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ &= \lambda(-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z) + (-x' + y' + z', -6x' + 4y' + 2z', 3x' - y' + z') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $X' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

$$\begin{aligned} A &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Montrer que $f \circ f = 2f$.

$$\begin{aligned} A \times A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2A. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= A \times A \\ &= 2A \\ &= 2\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(2f),\end{aligned}$$

on en déduit, par unicité de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, que $f \circ f = 2f$.

4. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$. Interpréter le résultat. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -x + y + \boxed{z} = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y + \boxed{z} = 0 \\ -4x + 2\boxed{y} = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y + \boxed{z} = 0 \\ -2x + \boxed{y} = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (x, 2x, -x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Une base de $\text{Ker}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. Comme $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 0$, on en déduit que l'application f n'est pas injective.

Dans la suite, on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. En déduire le rang de f . Interpréter le résultat.
D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

Ainsi

$$\text{rg}(f) = 2.$$

Comme $\text{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. L'application f n'est donc pas surjective.

6. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Une base de $\text{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Dans la suite, on pose $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la réunion des bases de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$. La famille

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre constituée de trois

vecteurs (le démontrer) et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

8. On note $\mathcal{F}$ la famille (u, v, w) .

Montrer que $\mathcal{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre constituée de 3 vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on peut conclure que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

9. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer P , ainsi que P^{-1} .

Par définition, on a

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & | & 3/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. Rappeler la formule de changement de bases et déterminer D .

D'après la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.

On a $f(u) = f(1, 2, -1) = (0, 0, 0) = 0u + 0v + 0w$,

$f(v) = f(1, 6, -3) = (2, 12, -6) = 0u + 2v + 0w$ et

$f(w) = f(1, 2, 1) = (2, 4, 2) = 0u + 0v + 2w$.

On retrouve bien

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Question déjà traitée en TD.

13. Déterminer l'expression explicite de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$A^0 = I_3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = 2^{n-1}A = 2^{n-1} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto 2P - (X-1)P'. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bien définie.

Indication : Il s'agit de montrer que si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} f(P) &= 2P - (X-1)P' \\ &= 2(aX^2 + bX + c) - (X-1)(2aX + b) \\ &= 2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX^2 - bX + 2aX + b \\ &= \underbrace{(2a+b)X + b + 2c}_{\in \mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. L'application f est donc bien définie.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrons que f est linéaire :

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= 2(\lambda P + Q) - (X-1)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda 2P + 2Q - (X-1)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda 2P - \lambda(X-1)P' + 2Q - (X-1)Q' \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
On a bien $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a $f(1) = 2 \times 1 - (X-1)[1]' = 2$,

$f(X) = 2X - (X-1)[X]' = 1 + X$,

$f(X^2) = 2X^2 - (X-1)[X^2]' = 2X$.

D'où

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

On a $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ (nombre de pivots non nuls après opérations sur

les colonnes). Comme $\text{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}_2[X])$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}_2[X]$ et f n'est pas surjective (et donc pas bijective).

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$.

Donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1 \neq 0$ et f n'est pas injective.

5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \\ &= \text{Vect}(2, 1+X, 2X) \\ &= \text{Vect}(1, 1+X, X) \\ &= \text{Vect}(1, X) \end{aligned}$$

car $1+X$ est une combinaison linéaire de 1 et de X .

Une base de $\text{Im}(f)$ est $(1, X)$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0 \\ &\iff (2a+b)X + b + 2c = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2a+b=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a=a \\ b=-2a \\ c=a \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \\ &\iff P = aX^2 - 2aX + a \text{ avec } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X^2 - 2X + 1)$ et une base de $\text{Ker}(f)$ est $(X^2 - 2X + 1)$.

6. On note $\mathcal{C} = (1, (X-1), (X-1)^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{C}$ est une famille de polynôme échelonnée en degrés, donc $\mathcal{C}$ est libre. De plus $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, donc $\mathcal{C}$ constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X-1)$ et $f((X-1)^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

On a $f(1) = 2 = 2 \times 1 + 0 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2$,

$f(X-1) = X-1 = 0 \times 1 + 1 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2$,

$f(X-1)^2 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X-1) + 0 \times (X-1)^2$.

Ainsi

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .

Par définition on a

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Quelle relation lient les matrices A , B , P et P^{-1} ?

D'après la formule de changement de bases, on a

$$B = P^{-1}AP.$$

10. Déterminer l'expression explicite de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$. Penser à traiter à part le cas $n = 0$:

$$A^0 = I_3$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Devoir à la maison

Matrices & Applications linéaires

Exercice 1. On note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z). \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .
3. Montrer que $f \circ f = 2f$.
4. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$. Interpréter le résultat.

Dans la suite, on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. En déduire le rang de f . Interpréter le résultat.
6. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Dans la suite, on pose $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
8. On note $\mathcal{F}$ la famille (u, v, w) . Montrer que $\mathcal{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
9. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer P , ainsi que P^{-1} .
10. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. Rappeler la formule de changement de bases et déterminer D .
11. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.
12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

13. Déterminer l'expression explicite de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2P - (X - 1)P'. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
Indication : Il s'agit de montrer que si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

4. Déterminer le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?
5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
6. On note $\mathcal{C} = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X - 1)$ et $f((X - 1)^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

8. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .
9. Quelle relation lient les matrices A , B , P et P^{-1} ?
10. Déterminer l'expression explicite de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.