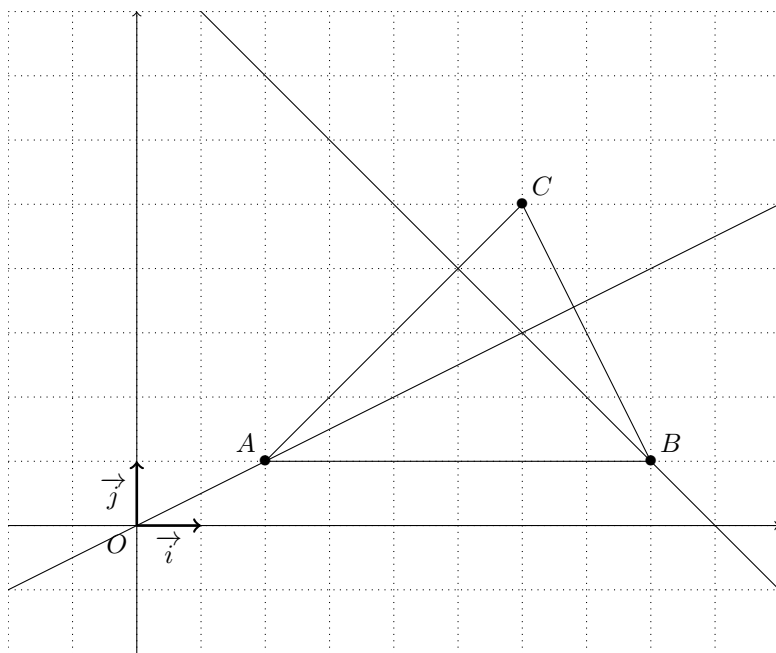


Devoir non surveillé

Droites remarquables du triangle

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. On considère le triangle suivant :



Hauteurs du triangle ABC

L'objectif de cette partie est de montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H .

1. Quelles sont les coordonnées des points A , B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

2. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x - 2y = 0$.
 - (a) Vérifier que le point A appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.
 - (b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$, que l'on note $\vec{n}_1$.
 - (c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
 - (d) Calculer $[\overrightarrow{BC}, \vec{n}_1]$.
 - (e) Que peut-on en déduire ?
3. On note $\mathcal{D}_2$ la hauteur issue de B .
 - (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
 - (b) En déduire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.
4. Intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
 - (a) Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.
 - (b) On note $H(x_H, y_H)$ le point d'intersection des deux hauteurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
Déterminer les coordonnées de H .
5. On note $\mathcal{D}_3$ la hauteur issue de C .
 - (a) Tracer $\mathcal{D}_3$ sur la figure (annexe).
 - (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_3$.
 - (c) Vérifier que le point H appartient aussi à la droite $\mathcal{D}_3$.
 - (d) Conclure.

Centre du cercle circonscrit au triangle ABC

On admet que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de Ω , centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

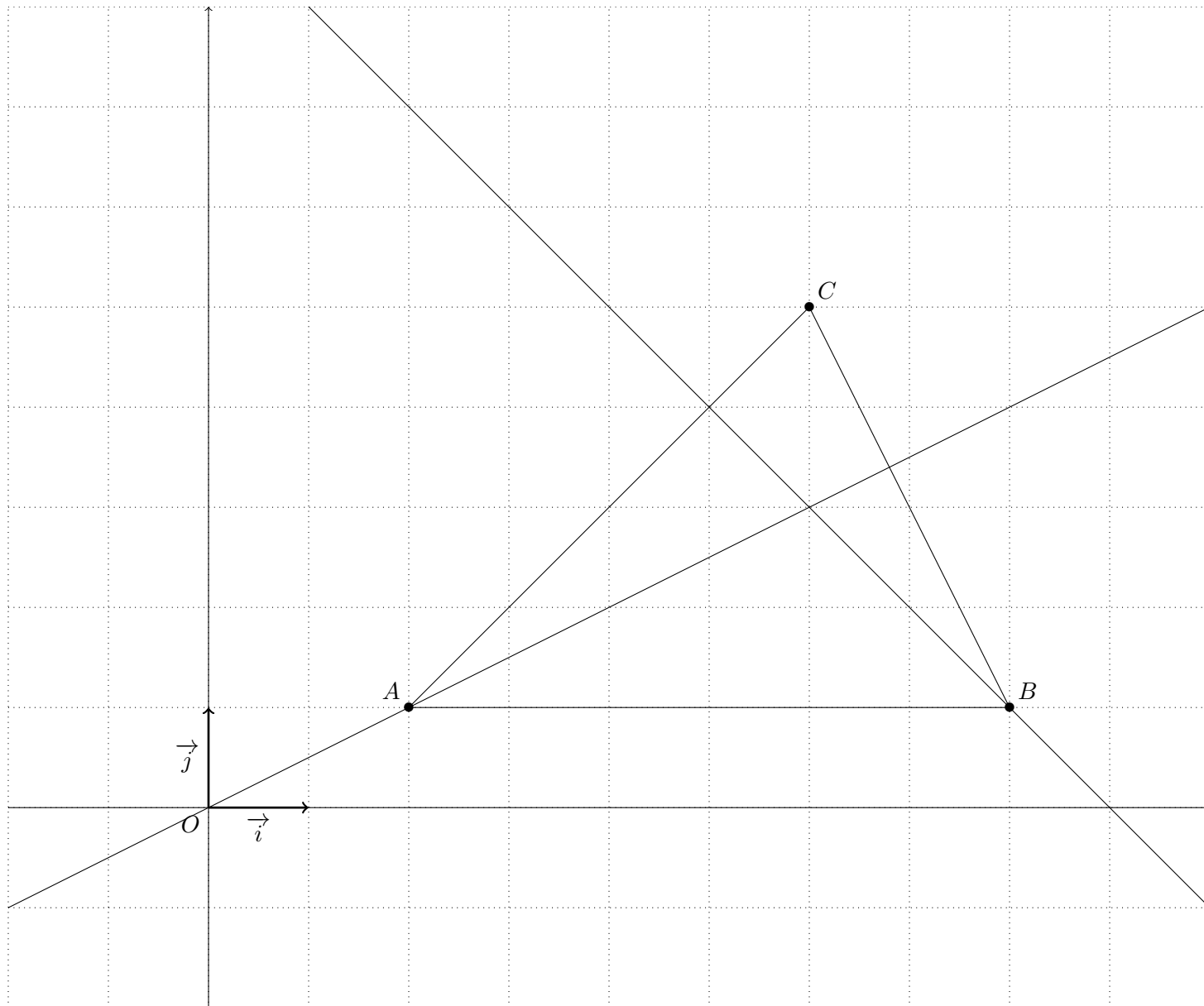
On note I, J, K les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

6. Placer les points I, J et K sur la figure (annexe) et déterminer leurs coordonnées par le calcul.
7. On note $\mathcal{L}_1$ la médiatrice du segment $[AB]$. Tracer la droite $\mathcal{L}_1$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{L}_1$.
8. On note $\mathcal{L}_2$ la médiatrice du segment $[BC]$. Tracer la droite $\mathcal{L}_2$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{L}_2$.
9. On note Ω le point d'intersection des droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Déterminer les coordonnées de Ω .

Centre de gravité et alignement

On admet que les médianes d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de G , centre de gravité du triangle ABC .

10. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$.
Que peut-on en déduire ?
11. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AJ) .
12. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CI) .
13. Déterminer les coordonnées du point G , centre de gravité du triangle ABC .
14. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.



DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

DM n°2

Équations différentielles & Géométrie élémentaire de l'espace

Exercice 1. On considère les équations différentielles suivantes :

$$xy' - (x+1)y = 0 \quad (E_1)$$

et

$$xy'' - (5x+1)y' + (6x+2)y = 0 \quad (E_2)$$

sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Déterminer a et b des réels tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{x+1}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

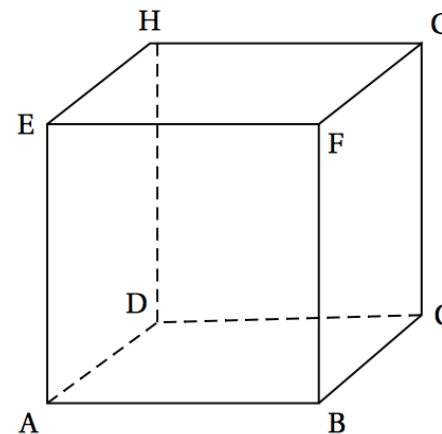
2. Résoudre (E_1) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $\varphi(x) = e^{2x}$.
Montrer que φ est une solution de (E_2) sur $]0; +\infty[$.
4. Soit $\mathbf{u}(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
On pose, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x)e^{2x}.$$

Montrer que $\mathbf{v}(x)$ est solution de (E_2) si et seulement si $\mathbf{u}'(x)$ est une solution de (E_1) .

5. Résoudre (E_2) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 2. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal

$$\mathcal{R} = (D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}).$$

On note K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

6. Montrer que les coordonnées du point K dans $\mathcal{R}$ sont $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.
7. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
8. Calculer la distance EK .

Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

9. Montrer que, pour tout m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
10. Déterminer une équation cartésienne du plan (MFD) .
11. On note d_m la distance du point E au plan (MFD) . Montrer que pour tout $m \in [0; 1]$,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

12. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.
13. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD) .

On note $\mathcal{S}$ la sphère de centre M et de rayon $r = \sqrt{2}$.

14. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
15. On note M' le projeté orthogonal du point M sur le plan (AFG) . Déterminer les coordonnées du point M' .
16. Montrer que quel que soit $m \in [0; 1]$, M' appartient à une droite dont on déterminera un système d'équations cartésiennes.
17. Déterminer l'intersection $(AFG) \cap \mathcal{S}$.
18. Déterminer l'intersection $(HG) \cap \mathcal{S}$.

Exercice 3. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation : $y + z = 0$. On considère la famille de plans

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1,$$

où $m \in \mathbb{R}$.

19. Montrer que quel que soit le réel m , la droite $\mathcal{D}$ n'est jamais perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_m$.

20. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}_m$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
21. Montrer que pour tout réel m , l'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{Q}$ est un point I_m dont on déterminera les coordonnées dans $\mathcal{R}$.
22. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre, ainsi que son rayon.
23. Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.
24. Montrer que quel que soit le réel m , I_m appartient à $\mathcal{C}$.

Devoir à la maison n°7 – Correction

Dénombrement et récurrences

Exercice 1. Dénombrement

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

Un code est un triplet de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$. Il y a 9^3 , soit $\boxed{729}$, codes possibles.

2. Combien y a-t-il de codes pairs ?

Un code est un triplet (a, b, c) où $a \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, $b \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ et $c \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Il y a $9^2 \times 4$, soit $\boxed{324}$, codes pairs.

3. Combien y a-t-il de codes ne contenant aucun chiffre 4 ?

On considère les triplets de $\llbracket 1, 9 \rrbracket \setminus \{4\}$. Il y a 8^3 , soit $\boxed{512}$, codes ne contenant aucun chiffre 4.

4. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

On sait que $\{\text{codes contenant au moins un chiffre 4}\} = \overline{\{\text{codes ne contenant aucun chiffre 4}\}}$.

Il y a donc $9^3 - 8^3$, soit $\boxed{217}$, codes contenant au moins un chiffre 4.

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

5. Combien y a-t-il de codes possibles ?

Un code est un triplet d'éléments distincts de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$. Il y a $9 \times 8 \times 7$, soit $\boxed{504}$, codes possibles.

6. Combien y a-t-il de codes impairs ?

Un code est un triplet (a, b, c) où $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $b \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \setminus \{c\}$ et $a \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \setminus \{b, c\}$. Il y a $5 \times 8 \times 7$, soit $\boxed{280}$, codes impairs.

7. Combien y a-t-il de codes contenant le chiffre 6 ?

On sait que $\{\text{codes contenant le chiffre 6}\} = \overline{\{\text{codes ne contenant aucun chiffre 6}\}}$.

Il y a donc $9 \times 8 \times 7 - 8 \times 7 \times 6$, soit $\boxed{168}$ codes à trois chiffres distincts contenant 6.

On considère à présent une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

8. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Un tirage est une partie de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ à trois éléments. Il y en a $\binom{9}{3}$, soit $\boxed{84}$.

9. Soit k un entier vérifiant $3 \leq k \leq 9$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?

Un tel tirage est une partie de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$, qui contient k et 2 éléments de $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Il y en a $\binom{k-1}{2}$.

10. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^9 \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Pour tout k entier vérifiant $3 \leq k \leq 9$, on note A_k l'ensemble des tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k , et Ω l'ensemble des tirages

de 3 boules possibles. On a

$$\Omega = A_3 \sqcup A_4 \sqcup \dots \sqcup A_9 = \bigsqcup_{k=3}^9 A_k.$$

$$\text{Donc } \text{card}(\Omega) = \sum_{k=3}^9 \text{card}(A_k), \text{ d'où}$$

$$\boxed{\sum_{k=3}^9 \binom{k-1}{2} = \binom{9}{3}.$$

Exercice 2. Raisonnement par récurrence

On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

11. Calculer les cinq premiers termes des suites $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = F_1 + F_0 = 1, F_3 = F_2 + F_1 = 2 \text{ et } F_4 = F_3 + F_2 = 3.$$

$$u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{1 + u_0} = 1, u_2 = \frac{1}{1 + u_1} = \frac{1}{2},$$

$$u_3 = \frac{1}{1 + u_2} = \frac{2}{3} \text{ et } u_4 = \frac{1}{1 + u_3} = \frac{3}{5}.$$

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est un entier naturel non nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}_n : \ll F_n \text{ est un entier naturel non nul} \gg$.

Initialisation : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies car $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. On sait que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donc F_{n+2} est la somme de deux entiers naturels non nuls. On en déduit que F_{n+2} est un entier naturel non nul et $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est un entier naturel non nul.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{Q}_n : \ll u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} \gg$.

Initialisation : $\mathcal{Q}_0$ est vraie car $u_0 = 0 = \frac{F_0}{F_1}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{1 + u_n} \quad (\text{par définition de } (u_n)) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}} \quad (\text{d'après } \mathcal{Q}_n) \\ &= \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + F_n} \\ &= \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \quad (\text{par définition de } (F_n)) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

14. On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Vérifier que $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.

$$\alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{et } \alpha + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \text{ donc } \alpha^2 = \alpha + 1.$$

$$\beta^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{et } \beta + 1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ donc } \beta^2 = \beta + 1.$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{R}_n : \ll F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) \gg$.

Initialisation : $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont vraies car $\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^0 - \beta^0) = 0 = F_0$ et

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^1 - \beta^1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = F_1.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{R}_{n+1}$ soient vraies. On a

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (\text{par définition de } (F_n)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) \quad (\text{d'après } \mathcal{R}_n \text{ et } \mathcal{R}_{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} + \alpha^n) - \frac{1}{\sqrt{5}} (\beta^{n+1} + \beta^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n (\alpha + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n (\beta + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n \alpha^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n \beta^2 \quad (\text{d'après Q4}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}_{n+2}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$.

16. En déduire une expression de u_n en fonction de α , β et n .

On utilise les résultats de Q3 et Q5.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}$.

17. Montrer que $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1 &\iff |\beta| < |\alpha| \\ &\iff |1 - \sqrt{5}| < |1 + \sqrt{5}| \\ &\iff \sqrt{5} - 1 < 1 + \sqrt{5} \\ &\iff -1 < 1 \end{aligned}$$

Ce qui est vrai.

Conclusion : On a montré par équivalence que $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$.

18. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \\ &= \frac{\alpha^n \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n \right)}{\alpha^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1} \right)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \times \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n+1}}$. Donc $\lim u_n = \frac{1}{\alpha}$ car $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$.

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} F_{3n} \text{ est pair} \\ F_{3n+1} \text{ et } F_{3n+2} \text{ sont impairs} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{S}_n : \ll \begin{cases} F_{3n} \text{ est pair} \\ F_{3n+1} \text{ et } F_{3n+2} \text{ sont impairs} \end{cases} \gg.$$

Initialisation : $\mathcal{S}_0$ est vraie car F_0 , qui vaut 0, est pair et F_1 et F_2 , égaux à 1, sont impairs.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{S}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{S}_{n+1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} F_{3n+3} \text{ est pair} \\ F_{3n+4} \text{ et } F_{3n+5} \text{ sont impairs} \end{cases}.$$

On sait que $F_{3n+3} = F_{3n+2} + F_{3n+1}$ (définition de (F_n)). F_{3n+3} est donc la somme de deux entiers impairs d'après $\mathcal{S}_n$. On en déduit que F_{3n+3} est pair.

On sait que $F_{3n+4} = F_{3n+3} + F_{3n+2}$ (par définition de (F_n)). F_{3n+4} est donc la somme d'un entier pair et d'un entier impair. D'où F_{3n+4} est

impair.

On sait que $F_{3n+5} = F_{3n+4} + F_{3n+3}$. F_{3n+5} est donc la somme d'un entier impair et d'un entier pair. On en déduit que F_{3n+5} est impair.

Donc $\mathcal{S}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} F_{3n} \text{ est pair} \\ F_{3n+1} \text{ et } F_{3n+2} \text{ sont impairs} \end{cases}.$$

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F_{n+4} &= F_{n+3} + F_{n+2} \\ &= (F_{n+2} + F_{n+1}) + (F_{n+1} + F_n) \\ &= ((F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}) + (F_{n+1} + F_n) \\ &= 3F_{n+1} + 2F_n. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$.

21. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{4n} est un multiple de 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}_n$: « F_{4n} est un multiple de 3 ».

Initialisation : $\mathcal{H}_0$ est vraie car F_0 est bien un multiple de 3 ($F_0 = 0$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$, c'est-à-dire F_{4n+4} est un multiple de 3.

D'après $\mathcal{H}_n$, il existe k un entier tel que $F_{4n} = 3k$. D'après la question précédente, $F_{4n+4} = 3F_{4n+1} + 2F_{4n}$, donc $F_{4n+4} = 3 \times \underbrace{(F_{4n+1} + 2k)}_{\in \mathbb{N}}$ et

F_{4n+4} est un multiple de 3. $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{4n} est un multiple de 3.

Devoir à la maison n°3

Dénombrement et récurrences

Exercice 1. Dénombrement

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes ne contenant aucun chiffre 4 ?
4. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

5. Combien y a-t-il de codes possibles ?
6. Combien y a-t-il de codes impairs ?
7. Combien y a-t-il de codes contenant le chiffre 6 ?

On considère à présent une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

8. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
9. Soit k un entier vérifiant $3 \leq k \leq 9$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
10. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^9 \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Exercice 2. Raisonnement par récurrence

On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

11. Calculer les cinq premiers termes des suites $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est un entier naturel non nul.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

14. Montrer que $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$.
16. En déduire une expression de u_n en fonction de α , β et n .
17. Montrer que $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$.
18. En déduire la limite de la suite (u_n) .

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} F_{3n} \text{ est pair} \\ F_{3n+1} \text{ et } F_{3n+2} \text{ sont impairs} \end{cases}.$$

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$.

21. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{4n} est un multiple de 3.

Devoir à la maison n°4 – Correction

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

On définit $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $\mathcal{C}_f$ son graphe (unité graphique : 10 cm).

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

On constate que lorsque $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, or $[\frac{1}{2}, 1] \subset [0, 1]$. Ainsi pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

3. En utilisant $\mathcal{C}_f$ et la première bissectrice, placer les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

Question traitée en classe.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ (récurrence - on pensera à utiliser la fonction f).

On pose H_n : " $0 \leq u_n \leq 1$ ".

Initialisation : H_0 est vraie car $u_0 = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n vraie et on montre H_{n+1} . On suppose que $0 \leq u_n \leq 1$, donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ car f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, d'où $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ et H_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

or $u_n \in [0, 1]$, donc $-(u_n - 1) \geq 0$, $(u_n + 2) > 0$ et $(u_n + 4) > 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion : La suite (u_n) est croissante.

6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite finie ℓ d'après le théorème de la limite monotone : $\lim u_n = \ell$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$. Par passage à la limite, on

obtient $\ell = \frac{3\ell + 2}{\ell + 4}$, donc $\ell^2 + \ell - 2 = 0$, donc $\ell = 1$ ou $\ell = -2$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, et par passage à la limite, on a $0 \leq \ell \leq 1$. D'où $\ell = 1$.

Conclusion : $\lim u_n = 1$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

7. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} \\ &= \frac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)} \\ &= \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= \frac{2}{5} \times v_n. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ ie $v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

8. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} &\iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \\ &\iff u_n(v_n - 1) = -(1 + 2v_n) \\ &\iff u_n = -\frac{1 + 2v_n}{v_n - 1}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

9. Retrouver le résultat de la question 6.

On a $\lim v_n = 0$ car $-1 < \frac{2}{5} < 1$. Ainsi $\lim u_n = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$.

Exercice 2.

Question 1a :

Par comparaison, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Question 1b :

f est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1$.

Soit $x \in [0, +\infty[$,

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0$$

$$\iff x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$\iff x = 2 \quad \text{car } x \in [0, +\infty[$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$

Question 2a :

Application du théorème de la bijection :

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$, donc f réalise une bijection de l'intervalle $[0, 2]$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ (qui contient 0). Il existe donc une unique $\beta \in [0, 2]$ tel que $f(\beta) = 0$.

De même, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]2, +\infty[$, f réalise une bijection de l'intervalle $]2, +\infty[$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ (qui contient 0). Il existe donc un unique $\gamma \in]2, +\infty[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Conclusion : f s'annule exactement deux fois : une première fois en β qui appartient à l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois en γ qui appartient à l'intervalle $]2, +\infty[$.

Question 2b :

On sait que $f(\beta) = 0$, donc $\frac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0$ et donc $\boxed{1 + \frac{\beta^3}{12} = \beta}$.

Question 2c :

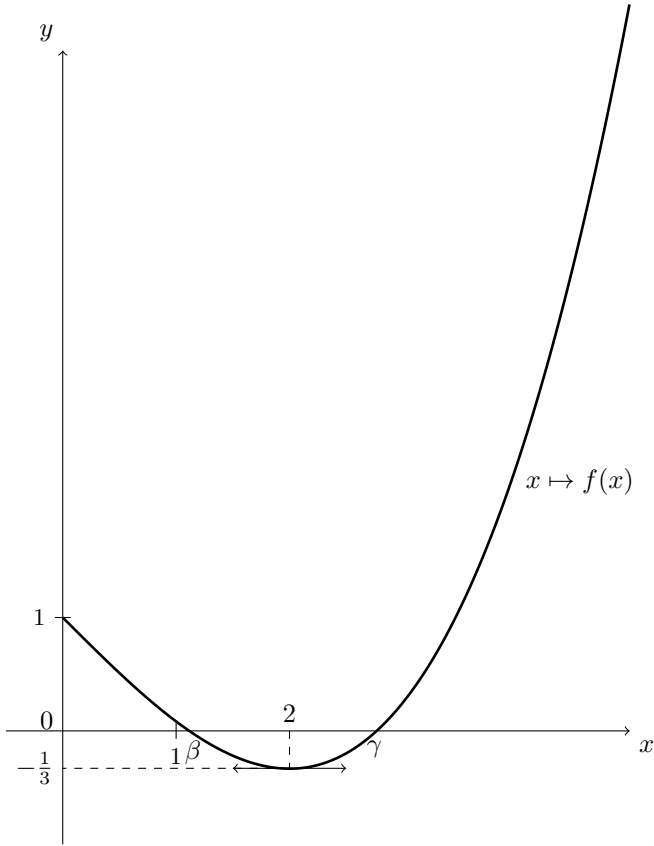
$f(1) = 0,08 > 0$ et $f(2) \simeq -0,06 < 0$ donc $\boxed{\beta \in]1, 2[}$.

De même, $f(2,7) \simeq -0,06 < 0$ et $f(2,8) \simeq 0,03 > 0$ donc $\boxed{\gamma \in]2,7; 2,8[}$.

Question 2d :

x	0	β	γ	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Question 3 :



Question 4a :

$$\boxed{u_1 = 1 + \frac{u_0^3}{12} = \frac{13}{12}}$$

Récurrence : On pose $\mathcal{H}_n : u_n \in [0, \beta]$.

$u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0, \beta]$ d'après la question 2c. $\mathcal{H}_0$ est donc vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$0 \leq u_n \leq \beta \implies 0 \leq u_n^3 \leq \beta^3 \quad (\text{car la fonction } x \mapsto x^3 \text{ est croissante sur } \mathbb{R})$$

$$\implies 0 \leq \frac{u_n^3}{12} \leq \frac{\beta^3}{12}$$

$$\implies 1 \leq 1 + \frac{u_n^3}{12} \leq 1 + \frac{\beta^3}{12}$$

$$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq \beta \quad (\text{d'après le résultat de la question 2b})$$

Ainsi $u_{n+1} \in [1, \beta]$, or $[1, \beta] \subset [0, \beta]$, donc $u_{n+1} \in [0, \beta]$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \beta]$

Question 4b :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n^3}{12} - u_n$ et $f(u_n) = \frac{u_n^3}{12} - u_n + 1$, donc

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n).$$

or $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après la question précédente) et f est positive sur l'intervalle $[0, \beta]$ (d'après la question 2d). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geq 0$.

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

Question 4c :

On a montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par β . La suite (u_n) est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim u_n$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12}$. Par passage à la limite, on a $\ell = 1 + \frac{\ell^3}{12}$, donc $\frac{\ell^3}{12} - \ell + 1 = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. Ainsi $\ell = \beta$ ou $\ell = \gamma$ (d'après 2a). De plus $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \in [0, \beta]$ par passage à la limite. Finalement $\ell = \beta$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers β .

Question d :

```

10 def u(n):
11     resu=1.0
12     i=0
13     if n==0:
14         return resu
15     else :
16         while i<n :
17             resu=float(resu**3)/12+1
18             i+=1
19         return resu
20
21 """ Alternative récursivité :
22
23 def u(n):
24     if n==0:
25         return 1
26     else :
27         return float(u(n-1)**3)/12+1
28
29 """
30
31
32 N=int(input("Entrer la valeur de N : "))
33
34 print(u(N))

```

Devoir à la maison n°4
Suites réelles
À rendre lundi 24/02/2025

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

On définit $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $\mathcal{C}_f$ son graphe (unité graphique : 10 cm).

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
3. En utilisant $\mathcal{C}_f$ et la première bissectrice, placer les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ (réurrence - on pensera à utiliser la fonction f).
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

7. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Retrouver le résultat de la question 6.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$.

1.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f .
2.
 - a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.
On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.
 - b) Simplifier l'expression $1 + \frac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).
 - c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $]1; 1,2[$ et que γ appartient à $]2,7; 2,8[$.
 - d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.
4. On cherche à obtenir une approximation de β . À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

- a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.
- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.
Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β .
- d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N .

DM - Correction.

Données $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

Conclusion: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 = -A$

1.2. $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$ donc $4A = M - I_3$
donc $M = I_3 + 4A$

1.3. $M^0 = I_3 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$.
 $M^1 = I_3 + 4A = I_3 + u_1 A$ avec $u_1 = 4$
 $M^2 = (I_3 + 4A)^2 = I_3 + 8A + 16A^2$ car $AI = IA$
 $= I_3 + 8A - 16A$ car $A^2 = -A$
 $= I_3 - 8A$
 $= I_3 + u_2 A$ avec $u_2 = -8$.

Conclusion: $M^0 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$
 $M^1 = I_3 + u_1 A$ avec $u_1 = 4$
 $M^2 = I_3 + u_2 A$ avec $u_2 = -8$

1.4. H_n : "il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$ "

H_0 est vraie: $M^0 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie:

Il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$

$$M^{n+1} = M^n \times M$$

$$= (I_3 + u_n A)(I_3 + 4A) \quad \text{d'après } H_n$$

$$= I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2$$

$$= I_3 + 4A + u_n A - 4u_n A \quad \text{car } A^2 = -A$$

$$= I_3 + (4 + u_n - 4u_n)A$$

$$= I_3 + (4 - 3u_n)A$$

$$= I_3 + u_{n+1} A \quad \text{avec } u_{n+1} = 4 - 3u_n$$

Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tq $M^n = I_3 + u_n A$

Données: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4 - 3u_n \end{cases}$ $v_n = u_n - 1$.

1.5.1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$
 $= 4 - 3u_n - 1$
 $= 3 - 3u_n$
 $= 3(1 - u_n)$
 $= 3 \times (-v_n)$
 $= -3v_n$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = -3v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -3$

(1.5.2) $v_0 = u_0 - 1 = -1$.
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -1 \times (-3)^n$
 Ccl: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1) \times (-3)^n$

(1.5.3) On sait que $v_n = u_n - 1$
 Donc $u_n = v_n + 1$
 Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1) \times (-3)^n + 1$.

(1.6) $M^n = I_3 + u_n A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + u_n \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2u_n & 0 & -2u_n \\ u_n & 1 & u_n \\ u_n & 0 & 1+u_n \end{pmatrix}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

(2.1) $M = 4J - 3I_3 \iff 4J = M + 3I_3$
 $\iff J = \frac{1}{4}(M + 3I_3)$

Ccl: Il existe une unique matrice J tq $M = 4J - 3I_3$:
 $J = \frac{1}{4}(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2.2) $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$

Ccl: $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = J$.

(2.3.1) Soient $A, B \in M_3(\mathbb{R})$
 Si $AB = BA$, alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

(2.3.2) $M = 4J - 3I_3$
 On a $(4J)(-3I_3) = -12J = (-3I_3)(4J)$
 Donc $M^n = (4J + (-3I_3))^n$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I_3^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k$$

$$= \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k$$

$$= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J$$

car $J^k = J$
 pour $k \geq 1$.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J$

$$(2.3.3) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = (4 + (-3))^n = 1^n = 1$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \\ = (-3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}$$

$$\text{Donc } (-3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1$$

$$\text{D'où } \boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

$$(2.3.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J$$

$$M^n = (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(2.4) Pour $n=0$:

$$\begin{pmatrix} 2(-3)^0 - 1 & 0 & 2(-3)^0 - 2 \\ 1 - (-3)^0 & 1 & 1 - (-3)^0 \\ 1 - (-3)^0 & 0 & 2 - (-3)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = M^0$$

L'égalité est encore vérifiée en $n=0$.

$$\text{Rè : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

Problème : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M .

Considérons la matrice A définie par : $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1.1 Calculer A puis A^2 .

1.2 Exprimer la matrice M en fonction de la matrice A .

1.3 Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$.

Nous rappelons que : $M^0 = I_3$.

1.4 Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$.

La preuve mettra en avant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 4$.

1.5 Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1$.

1.5.1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

1.5.2 En déduire pour tout entier naturel n , une expression de v_n en fonction de n .

1.5.3 En déduire alors, pour tout entier naturel n , une expression de u_n en fonction de n .

1.6 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M .

2.1 Montrer qu'il existe une unique matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M = 4J - 3I_3$.

2.2 Calculer J^2 , puis pour tout entier naturel non nul n , J^n .

2.3 Soit n un entier naturel non nul.

2.3.1 Énoncer la formule du binôme.

2.3.2 Montrer que : $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J$.

2.3.3 Montrer que : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.

2.3.4 En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J ,
puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2.4 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On pose $B = A - I_3$.
 - a. Calculer B^2 .
 - b. En déduire une relation entre A^2 , A et I_3 .
2. On considère le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les racines de P .
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P , dont le reste sera noté R_n .
 - b. Déterminer R_n .
4. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$;
5. Proposer une autre méthode pour déterminer A^n .

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

Calculer $\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$.

Devoir à la maison n°6
Espaces vectoriels
À rendre le mardi 26 avril 2022

Exercice 1. On considère les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ?
2. Si elle est liée, déterminer les relations linéaires satisfaites par ces quatre vecteurs.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on note

$$P_0 = X^3, \quad P_1 = X^3 + X^2, \quad P_2 = X^3 + X^2 + X \quad \text{et} \quad P_3 = X^3 + X^2 + X + 1.$$

3. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) constitue une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déterminer les coordonnées de la matrice $P = 2 + X - X^2 - X^3$ dans cette base. En déduire $\text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2, P_3)}(P)$.

Exercice 3. On considère la partie F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a - c = 0 \text{ et } a - 3b + d = 0 \right\}.$$

5. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
6. Déterminer une famille génératrice de F .
7. En déduire une base de F , ainsi que la dimension de F .

Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose $G = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

8. La famille (A_1, A_2, A_3) est-elle libre ? Dans le cas contraire, déterminer une relation linéaire satisfaite par ces trois matrices.
9. En déduire une base de G , ainsi que sa dimension.
10. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Devoir à la maison n°8

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (A, B, C, D)$ est une famille libre.
2. En déduire que $\mathcal{F}$ constitue une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{F}$. En déduire $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(M)$.

Exercice 2. 1. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - z = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}.$$

- (a) Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - (b) Déterminer une base de F . En déduire la dimension de F .
2. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

(a) Déterminer le rang de la famille (v_1, v_2, v_3) .

(b) En déduire une base de G , ainsi que sa dimension.

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$. Déterminer une équation satisfaite par les coordonnées de X .

3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 3. Soient

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

et

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(x) - (ax + b)$$

vérifie $f \in F$.

4. En déduire que $F \oplus G = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Devoir à la maison - S'entraîner

Ce sujet contient deux exercices indépendants et un sujet de concours.

Je vous demande de me rendre au minimum l'un des deux exercices rédigé pour le lundi 13 mai.

Exercice 1. On note

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .
3. Montrer que $f \circ f = 2f$.
4. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$. Interpréter le résultat.

Dans la suite, on pose $u = (1, 2, -1)$.

5. En déduire le rang de f . Interpréter le résultat.
6. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Dans la suite, on pose $v = (1, 6, -3)$ et $w = (1, 2, 1)$.

7. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
8. On note $\mathcal{F}$ la famille (u, v, w) . Montrer que $\mathcal{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
9. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer P , ainsi que P^{-1} .
10. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. Rappeler la formule de changement de bases et déterminer D .
11. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.
12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
13. Déterminer l'expression explicite de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On note

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto 2P - (X - 1)P'.$$

1. Montrer que f est bien définie.
Indication : Il s'agit de montrer que si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer A .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

4. Déterminer le rang de f . L'application f est-elle injective? surjective? bijective?
5. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
6. On note $\mathcal{C} = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B .

Indication : Calculer $f(1)$, $f(X - 1)$ et $f((X - 1)^2)$. Utiliser la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

8. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .
9. Quelle relation lient les matrices A , B , P et P^{-1} ?
10. Déterminer l'expression explicite de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème I : Algèbre et Géométrie

A. Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(1) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 – Mathématiques

Calculatrice autorisée – Durée : 2 heures

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient

$$A(X) = X^4 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 - 2X + 2.$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$. On note $Q(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste de cette division euclidienne.
2. Quelle relation lie les polynômes $A(X)$, $B(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$?
3. Calculer $B(1 + i)$.
4. En déduire $A(1 + i)$. On utilisera les résultats des questions précédentes.

Exercice 2. MATRICES, POLYNÔMES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverse et puissances de la matrice A

5. Calculer A^2 . On détaillera les calculs effectués.
6. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I$.
7. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

On note $P(X) = X^2 - 3X + 2$.

8. Déterminer les racines de P et factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ et $Q(X)$ son quotient.

9. Écrire la relation de division euclidienne liant les polynômes X^n , $P(X)$, $R(X)$ et $Q(X)$.
10. Déterminer $R(X)$.
11. En déduire une expression de A^n en fonction de I , de A et de n .
12. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$\text{On note } E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

13. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

et résoudre ce système.

14. En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

On note $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$.

15. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier que P est inversible.

17. Montrer que $AP = PD$. On détaillera les calculs effectués.

18. En déduire une expression de A , puis de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n .

Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note

$$C_A = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

19. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on vérifiera les quatre points de la définition).

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$M(a, b) = aI + bA = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

et

$$D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P.$$

20. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que la matrice $D(a, b)$ est une matrice diagonale. On explicitera ses coefficients.

On note

$$F = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = I \}.$$

21. L'espace F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

22. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$M(a, b)^2 = I \iff D(a, b)^2 = I.$$

23. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M(a, b)^2 = I$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°7 – Mathématiques

Calculatrice interdite – Durée : 1 h 30

Exercice 1. SUITE RÉCURRENTÉ ET FONCTION

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

4. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Retrouver le résultat de la question 3.

Exercice 2. MATRICES

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} . On vérifiera le résultat obtenu.
8. Vérifier que $AP = PD$. On détaillera les calculs.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
10. Déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis expliciter les neuf coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.