NOM : Prénom :

Devoir surveillé n°1 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

- De la qualité de la rédaction :
 justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles ⇒, ⇔, = ...
- 2. De la présentation : résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. (5 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$.

- 1. Vérifier que $x_0 = 1$ est une racine de P(x).
- 2. En déduire une factorisation de P(x) par division euclidienne.
- 3. Résoudre l'inéquation $P(x) \ge 0$ (E_1) .

On considère l'inéquation

$$2\ln(x) + \ln(x+3) \geqslant \ln(5-x)$$
 (E₂).

- 4. Déterminer le domaine de définition de (E_2) .
- 5. Résoudre (E_2) .

Exercice 2. (5 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = 4x^2 - 7x - 2.$$

6. Compléter l'assertion suivante : x_1 et x_2 sont les du polynôme P(x) si et seulement si

$$x_1 + x_2 = \dots$$
 et $x_1 \times x_2 = \dots$

- 7. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation P(x) = 0 (E_3) . Vérifier son résultat.
- 8. Factoriser le polynôme P(x).
- 9. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

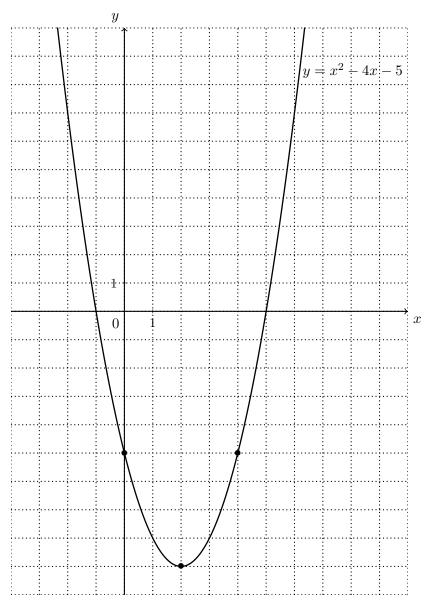
$$4x^4 - 7x^2 - 2 = 0. \quad (E_4)$$

10. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$4e^{2x} - 7e^x - 2 < 0.$$
 (E₅)

Exercice 3. (6 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x^2 - 4x - 5|$$
 et $g(x) = x + 1$.



- 11. Dresser le tableau de signes de $x^2 4x 5$.
- 12. Sur le graphique, représenter la fonction f(x) en rouge (valeur absolue) et la fonction g(x) en bleu.
- 13. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$f(x) < g(x), \quad (E_6)$$

c'est-à-dire

$$|x^2 - 4x - 5| < x + 1$$
 (E_6) .

14. Retrouver ce résultat par le calcul (disjonction de cas).

Exercice 4. (4 points) Soit $m \in \mathbb{R}$. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - (m+1)x + 4.$$

15. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation f(x) = 0 a-t-elle une unique solution?

Calculer alors cette racine.

- 16. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation f(x) = 0 n'a-t-elle aucune solution?
- 17. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation f(x) = 0 a-t-elle deux solutions réelles (distinctes) strictement positives?
- 18. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation f(x) = 0 a-t-elle deux solutions entières?