

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. (6 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

1. Vérifier que $x_0 = -1$ est une racine de $P(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$ par division euclidienne.
3. Dresser le tableau de signes de $P(x)$.
4. Résoudre l'inéquation

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 5}{x - 1} \leq 1 \quad (E_1).$$

Exercice 2. (6 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = -2x^2 + x + 3.$$

5. Compléter l'assertion suivante :

x_1 et x_2 sont les du polynôme $P(x)$ si et seulement si

$$x_1 + x_2 = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \dots\dots\dots$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. (E_2)

7. Vérifier le résultat de la question 6.

8. Factoriser le polynôme $P(x)$.

9. Dresser le tableau de signes de $P(x)$.

10. À l'aide d'un changement de variables, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

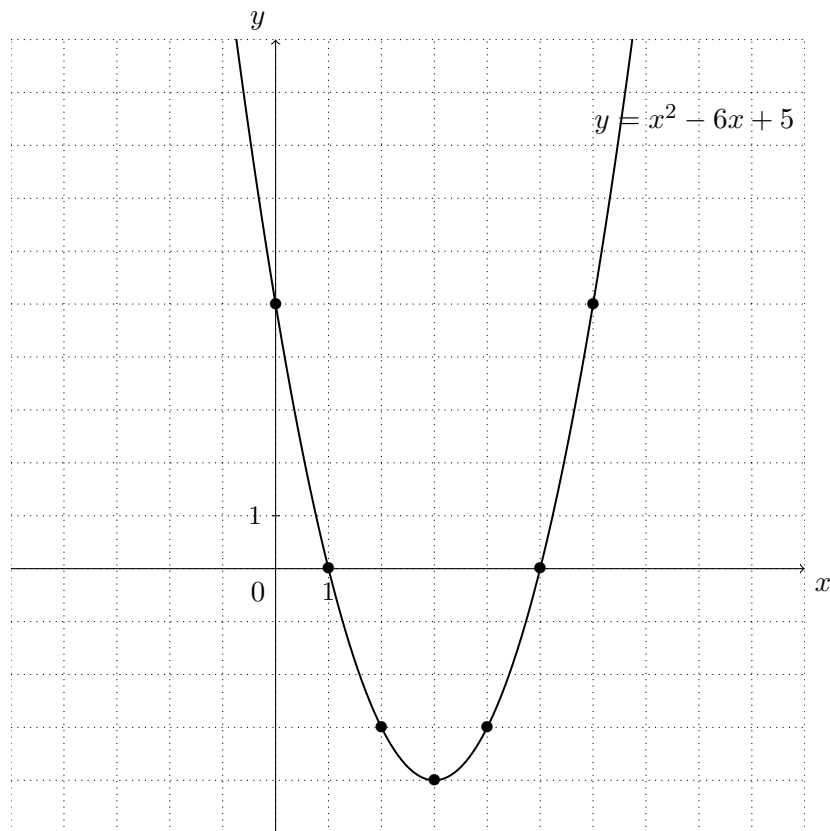
$$-2x^4 + x^2 + 3 = 0. \quad (E_3)$$

11. Déterminer le domaine de validité et résoudre l'inéquation :

$$\ln(x + 2) + \ln(5 - 2x) \leq \ln(7). \quad (E_4)$$

Exercice 3. (6 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = |1 - x| \quad \text{et} \quad g(x) = |x^2 - 6x + 5|.$$



12. Sur le graphique précédent, ajouter le graphe de la fonction $x \mapsto 1 - x$ en **noir**, celui de la fonction f en **bleu** et celui de la fonction g en **rouge**.

13. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = g(x), \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}. \quad (E_5)$$

14. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 4. (2 points) Soit $m \in \mathbb{R}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1).$$

15. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une unique solution ?
Calculer alors cette racine.
16. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?
17. Pour quelle(s) valeur(s) de m a-t-on $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?