NOM :
Prénom :

Devoir surveillé n°2 - Mathématiques

Durée : 1 heure - Calculatrice autorisée

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Soient I et J deux intégrales définies par

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Rappeler la formule d'intégration par parties.
2. En appliquant une intégration par parties, montrer que $I = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + J$.
3. En appliquant une intégration par parties, montrer que $J = -I$.
4. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

5. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
6. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
7. Calculer $f'(x)$.
8. Dresser le tableau de variations de f.
9. Vérifier que $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.
10. Déterminer a et b des réels tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

    Vérifier le résultat obtenu.
11. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.
    On pourra simplifier l'expression de $F(x)$.
12. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

On considère la fonction $G(x)$ définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$G(x) = (x+2)\ln(x+1) - x.$$

13. Vérifier que $G(x)$ est une primitive de $F(x)$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

On note

$$I = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

14. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I.