Devoir surveillé n°2 - Correction

Exercice 1. Soient I et J deux intégrales définies par

$$I = \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx.$$

1. Rappeler la formule d'intégration par parties.
   Soient u et v de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$. On a

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

2. En appliquant une intégration par parties, montrer que $I = 1 + e^\pi + J$.
   On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx \\ &= [e^x \times (-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \times (-\cos(x))\,dx \\ &= -e^\pi \cos(\pi) + e^0 \cos(0) + \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \\ &= e^\pi + 1 + J. \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{I = 1 + e^\pi + J.}$

3. En appliquant une intégration par parties, montrer que $J = -I$.
   On a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \\ &= [e^x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx \\ &= e^\pi \sin(\pi) - e^0 \sin(0) - I \\ &= -I. \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{J = -I.}$

4. En déduire les valeurs de I et de J.
   On a montré que

$$\begin{cases} I - J = 1 + e^\pi \\ J = -I \end{cases},$$

   donc

$$\begin{cases} 2I = 1 + e^\pi \\ J = -I \end{cases},$$

   d'où

$$\boxed{I = \frac{1 + e^\pi}{2} \quad \text{et} \quad J = -\frac{1 + e^\pi}{2}.}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

Nom :
Prénom :

5. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
   $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.}$

6. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   $\lim_{x\to -1} x = -1$ et $\lim_{x\to -1} (x+1)^2 = 0^+$, donc $\boxed{\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty}$ par limite d'un quotient.
   Interprétation graphique : $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 0.$
   On a montré que $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.}$. Les précédents calculs permettent de montrer que $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.}$
   Interprétation graphique : $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $\pm\infty$.

7. Calculer $f'(x)$.
   Formules nécessaires : dérivée d'un quotient et dérivée de $u(x)^2$ égale à $2u'(x)u(x)$.
   Ici

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{[x]' \times (x+1)^2 - x\left[(x+1)^2\right]'}{\left((x+1)^2\right)^2} \\
&= \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{1-x^2}{(x+1)^4}.
\end{aligned}
$$

   Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\boxed{f'(x) = \frac{1-x^2}{(x+1)^4}.}$

8. Dresser le tableau de variations de f.

9. Vérifier que $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}$.
   Dériver l'expression $\frac{1}{x+1}$, obtenir l'expression $-\frac{1}{(x+1)^2}$, et conclure.

10. Déterminer a et b des réels tels que

$$
f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.
$$

   Vérifier le résultat obtenu.
   On a

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} \forall x \in D_f &\iff \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} \quad \forall x \in D_f \\
&\iff x = ax + (a+b) \quad \forall x \in D_f \\
&\iff a = 1 \quad \text{et} \quad a+b = 0 \\
&\iff a = -1 \quad \text{et} \quad b = -1.
\end{aligned}
$$

   Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\boxed{f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.}$
   Vérification : On a bien $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} = f(x).$

11. En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.
   On pourra simplifier l'expression de $F(x)$.
   Une primitive de $f(x)$ est

$$
F(x) = \ln\left(|x+1|\right) + \frac{1}{x+1}.
$$

   Sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, $x+1>0$ donc

$$
\boxed{F(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}.}
$$

12. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
   On a $F(0) = \ln(1) + 1 = 1$ et $F(1) = \ln(2) + \frac{1}{2}$.

On considère la fonction $G(x)$ définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$
G(x) = (x+2)\ln(x+1) - x.
$$

Nom :
Prénom :

13. Vérifier que $G(x)$ est une primitive de $F(x)$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.
    Formules nécessaires : Dérivée d'un produit et dérivée de $\ln(u(x))$.
    On a

$$\begin{aligned} G'(x) &= [x+2]' \ln(x+1) + (x+2)\left[\ln(x+1)\right]' - 1 \\ &= \ln(x+1) + (x+2)\frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \ln(x+1) + \frac{(x+2)-(x+1)}{x+1} \\ &= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \\ &= F(x), \end{aligned}$$

    donc $G(x)$ est bien une primitive de $F(x)$.

On note

$$I = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

14. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I.
    On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(1) - 0 - [G(x)]_0^1 \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2} - (G(1) - G(0)) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2} - (3\ln(2) - 1 - 2\ln(1)) \\ &= \frac{3}{2} - 2\ln(2). \end{aligned}$$

    Ainsi $\boxed{I = \frac{3}{2} - 2\ln(2).}$