

DS1 - Eléments de correction.

Exercice 1.

$$1. \quad P(-1) = 2 \times (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 + (-1) - 2$$

$$= -2 + 5 - 3$$

$$= 0$$

donc -1 est bien une racine de $P(x)$.

$$2. \quad \begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 + x - 2 & x+1 \\ - (2x^3 + 2x^2) & 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline 3x^2 + x - 2 & \\ - (3x^2 + 3x) & \\ \hline -2x - 2 & \\ - (-2x - 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+1)(2x^2+3x-2)$

$$3. \quad P(x) \leq 0 \iff (x+1)(2x^2+3x-2) \leq 0.$$

Racines de $2x^2+3x-2$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2.$$

$$x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	-2	-1	$1/2$	$+\infty$		
$x+1$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$		
$2x^2+3x-2$	$+$	$\emptyset$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$	
$P(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$

Conclusion: $S_1 =]-\infty, -2] \cup [-1, 1/2]$.

4. (E_2) est définie ssi $x > 0$ et $2x+5 > 0$
et $2-x > 0$.

x	$-\infty$	$-5/2$	0	2	$+\infty$
x	-	-	$\emptyset$	+	+
$2x+5$	-	$\emptyset$	+	+	+
$2-x$	+	+	+	$\emptyset$	-

Domaine de définition de (E_2) : $]0; 2[$.

5. Soit $x \in]0, 2[$.

$$2 \ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$$

$$\text{ssi } e^{2 \ln(x) + \ln(2x+5)} \leq e^{\ln(2-x)} \quad (*)$$

$$\text{ssi } e^{\ln(x^2) + \ln(2x+5)} \leq 2-x$$

$$\text{ssi } e^{\ln(x^2(2x+5))} \leq 2-x$$

$$\text{ssi } 2x^3 + 5x^2 \leq 2-x$$

$$\text{ssi } 2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0.$$

$$\text{ssi } P(x) \leq 0.$$

Conclusion: $S_2 = S_1 \cap]0, 2[$

$S_2 =]0, 1/2]$.

(*) , car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. $P(x) = 9x^2 + 5x - 4$.

6. α_1 et α_2 sont les RACINES de $P(x)$

si et seulement si $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -5/9 \\ \alpha_1 \times \alpha_2 = -4/9 \end{cases}$

7. $\Delta = 5^2 - 4 \times 9 \times (-4) = 169$

$$\alpha_1 = \frac{-5-13}{18} = -\frac{18}{18} = -1$$

$$\alpha_2 = \frac{-5+13}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $S_3 = \left\{ -1; \frac{4}{9} \right\}$.

8. $P(-1) = 9 - 5 - 4 = 0 \checkmark$

$$P\left(\frac{4}{9}\right) = 9 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 5 \times \frac{4}{9} - 4 = \frac{16}{9} + \frac{20}{9} - \frac{36}{9} = 0 \checkmark$$

ou $\alpha_1 + \alpha_2 = -1 + \frac{4}{9} = -\frac{9}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{5}{9} \checkmark$
 $\alpha_1 \times \alpha_2 = -\frac{4}{9} \checkmark$

9. $P(x) = 9(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$

donc $P(x) = 9\left(x + 1\right)\left(x - \frac{4}{9}\right)$

10.

x	$-\infty$	-1	$4/9$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	$\ominus$	$\ominus$	$+$

Conclusion: $S_4 =]-\infty, -1[\cup]4/9, +\infty[$

11. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

ssi $9X^2 + 5X - 4 = 0$ (avec $X = x^2$)

ssi $X = -1$ ou $X = \frac{4}{9}$

ssi $x^2 = -1$ ou $x^2 = \frac{4}{9}$

ssi $x = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ ou $x = \sqrt{\frac{4}{9}}$

Conclusion: $S_5 = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}$

12. $9e^{2x} + 5e^x - 4 > 0$

$$\Leftrightarrow 9(e^x)^2 + 5e^x - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow 9(e^x + 1)(e^x - 4/9) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - 4/9}{9(e^x + 1)} > 0 \quad \text{car } 9(e^x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{4}{9}\right) \quad \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[$$

$$S_6 =]\ln\left(\frac{4}{9}\right), +\infty[$$

$$\text{ou } S_6 =]2\ln 2 - 2\ln 3, +\infty[$$

Exercice 3.

13.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
x^2-6x+5	+	ϕ	-	+

14.

cf graphe.

15.

16.

17.

Graphiquement

$$S_7 = \{0, 2, 5\}.$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$x^2 - 6x + 5$		+	-	+
$ x^2 - 6x + 5 $		$x^2 - 6x + 5$	$-x^2 + 6x - 5$	$x^2 - 6x + 5$
(E_7) $ x^2 - 6x + 5 $ $= 5 - x$	Lorsque $x \leq 1$: $(E_7) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 5 - x$ $\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 5) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$ $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$	Lorsque $x \in [1, 5]$: $(E_7) \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 5 - x$ $\Leftrightarrow -x^2 + 7x - 10 = 0$ $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10)$ $\Delta = 9$ $x_1 = \frac{-7-3}{-2} = 5$ ou $x_2 = \frac{-7+3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$	Lorsque $x \geq 5$: $(E_7) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 5 - x$ $\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 5) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$	
	$S_1 = \{0\}$ car $5 \notin]-\infty, 1]$.	$S_2 = \{2, 5\}$ car $2 \in [1, 5]$ et $5 \in [1, 5]$	$S_3 = \{5\}$ car $0 \notin [5, +\infty[$	
Conclusion:	L'ensemble des solutions de (E_7) est $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, c'est-à-dire $\{0, 2, 5\}$.			

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. (6 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

1. Vérifier que $x_0 = -1$ est une racine de $P(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$ par division euclidienne.
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$ (E_1).

On considère l'inéquation

$$2 \ln(x) + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x) \quad (E_2).$$

4. Déterminer le domaine de définition de (E_2).
5. Résoudre (E_2).

Exercice 2. (7 points) *Donnée* : $\sqrt{169} = 13$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = 9x^2 + 5x - 4.$$

6. Recopier et compléter l'assertion suivante :

x_1 et x_2 sont les du polynôme $P(x)$ si et seulement si
 $x_1 + x_2 = \dots\dots\dots$ et $x_1 \times x_2 = \dots\dots\dots$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ (E_3).

8. Vérifier le résultat de la question 7.

9. Factoriser le polynôme $P(x)$.

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$P(x) > 0. \quad (E_4)$$

11. À l'aide d'un changement de variables, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

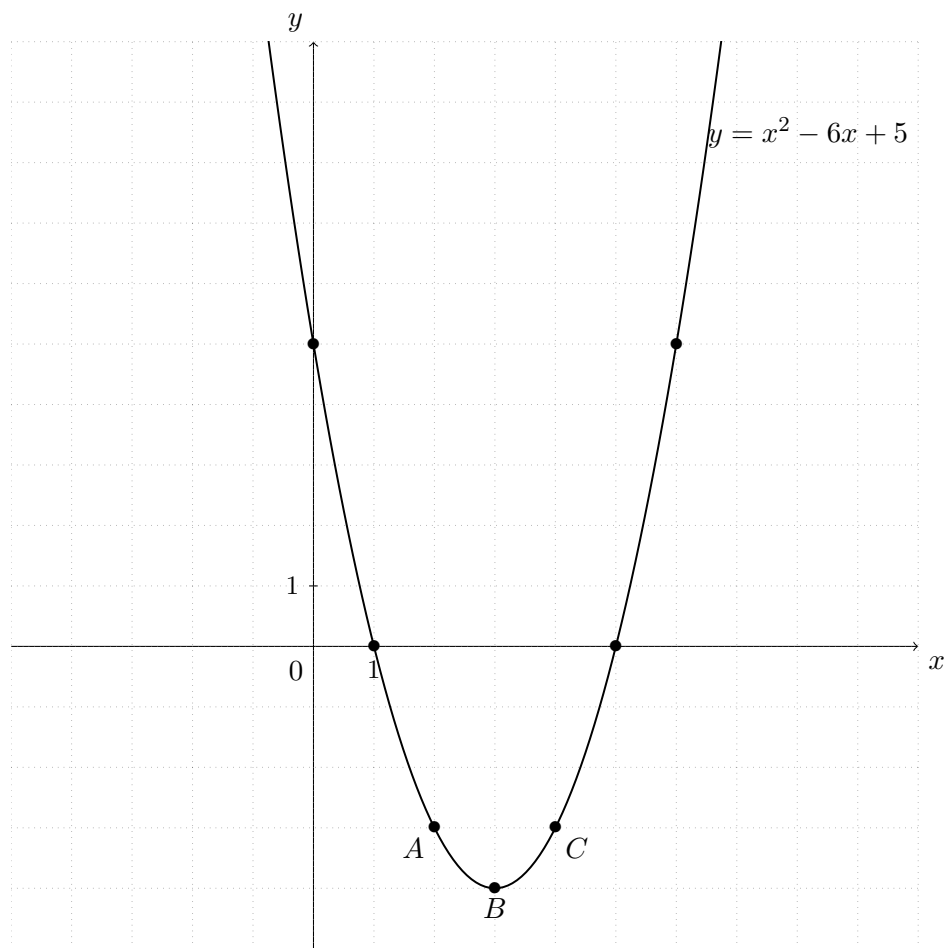
$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0. \quad (E_5)$$

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$9e^{2x} + 5e^x - 4 > 0. \quad (E_6)$$

Exercice 3. (7 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| \quad \text{et} \quad g(x) = 5 - x.$$



13. Dresser le tableau de signes de $x^2 - 6x + 5$.

14. On note A' , B' et C' les symétriques des points A , B et C par rapport à l'axe des abscisses. Placer ces points sur le graphique précédent.

15. Sur ce même graphique, représenter la fonction $f(x)$ en rouge (valeur absolue).

16. Sur ce même graphique toujours, représenter la fonction $g(x)$ en vert.

17. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = g(x), \quad (E_7)$$

c'est-à-dire

$$|x^2 - 6x + 5| = 5 - x \quad (E_7).$$

18. Retrouver ce résultat par le calcul (disjonction de cas).

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Soient $z_1 = \sqrt{6} - \mathbf{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 - \mathbf{i}$.

1. Écrire sous forme exponentielle les complexes z_1 et z_2 .

2. En déduire la forme exponentielle le complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

3. Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right) \mathbf{i}$.

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

5. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y - z &= 0 \\ x + 3y &= 3 \\ 3x - 2z &= 4 \end{cases}.$$

Vérifier le résultat obtenu.

Soit a un réel fixé. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 1 \\ 2x - y + az &= 2 \end{cases}.$$

6. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.

7. Discuter, suivant la valeur de a , le nombre de solutions du système $\mathcal{S}_2$.

8. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a \neq 3$.

Exercice 3. Les 5 assertions suivantes sont vraies. Les démontrer.

9. Proposition 1 :

$$(1 + \mathbf{i})^5 = -4 - 4i.$$

10. Proposition 2 : Pour tout nombre réel α ,

$$2e^{i\alpha} \cos(\alpha) = 1 + e^{2i\alpha}.$$

11. Proposition 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n (4k + 3) = (n + 1)(2n + 3).$$

12. Proposition 4 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$8 \sin(x)^4 = \cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3.$$

13. Soit ω le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{5}$.

Proposition 5 : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

Exercice 4. Soient I et J deux intégrales définies par

$$I = \int_0^\pi e^{2x} \sin(x) \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^{2x} \cos(x) \, dx.$$

14. Rappeler la formule d'intégration par parties.

15. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $2I = -J$.

16. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 2J + e^{2\pi} + 1$.

17. En déduire les valeurs exactes de I et de J .

Exercice 5.

18. Déterminer les racines et factoriser le polynôme $x^2 + 3x + 2$.

19. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

20. En déduire la valeur exacte de la somme

$$S = \sum_{k=3}^{14} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 – Correction

Mathématiques

Exercice 1. DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A = (-1, 6)$, $B = (4, 1)$ et $C = (7, 2)$ trois points de $\mathcal{P}$.

On note :

- H l'orthocentre du triangle ABC ,
- Ω le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC ,
- G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Calculer l'aire du triangle ABC .

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AC})|}{2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-20 + 40| = 10 \text{ ua.}$$

2. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.

Justifier que $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC .

Un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}_1$ est $(3, 1) = \vec{BC}$. Donc $\mathcal{D}_1$ est perpendiculaire à (BC) . De plus $3x_A + y_A - 3 = 0$, donc $A \in \mathcal{D}_1$. On en déduit que $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC .

3. Déterminer une équation de $\mathcal{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC .

$\mathcal{D}_2$ passe par le point B et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\vec{AC}$.

$$\mathcal{D}_2 : 2x - y - 7 = 0.$$

4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).

$H = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, donc $3x_H + y_H = 3$ et $2x_H - y_H = 7$. On obtient, après résolution du système 2×2 , $x_H = 2$ et $y_H = -3$.

Conclusion : $H(2, -3)$.

5. On note :

- A' le milieu du segment $[BC]$,
- B' le milieu du segment $[AC]$,

Placer les points A' et B' sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).

$$x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{11}{2} \text{ et } y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Donc } A' \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

De même, $B'(3, 4)$.

6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.

Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.

Δ_1 admet pour vecteur normal $(3, 1) = \vec{BC}$, donc Δ_1 est perpendiculaire à (BC) . De plus $3x_{A'} + y_{A'} - 18 = 0$, donc A' , milieu du segment $[BC]$ appartient à Δ_1 . La droite Δ_1 est donc la médiatrice du segment $[BC]$.

7. Déterminer une équation de Δ_2 , médiatrice du segment $[AC]$.

Δ_2 passe par le point $B'(3, 4)$ et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\vec{AC}$:

$$\Delta_2 : 2x - y - 2 = 0.$$

8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).

$\Omega = \Delta_1 \cap \Delta_2$, donc $3x_\Omega + y_\Omega = 18$ et $2x_\Omega - y_\Omega = 2$. On obtient, après résolution du système 2×2 , $x_\Omega = 4$ et $y_\Omega = 6$. Conclusion : $\Omega(4, 6)$.

9. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = \Omega A^2, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{C} : (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25.$$

10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.

$$\text{On sait que } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{10}{3} \text{ et que } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3.$$

11. Montrer que les points H , Ω et G sont alignés.

$$\text{On a } \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{H\Omega} & \overrightarrow{HG} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ donc } \overrightarrow{H\Omega} \text{ et } \overrightarrow{HG} \text{ sont colinéaires et les points } H, \Omega \text{ et } G \text{ sont alignés.}$$

On note :

H' l'image du point H par la symétrie centrale de centre A' .

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).

On a, par définition, $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{A'H'}$ donc

$$\begin{cases} x_{H'} - x_{A'} = x_{A'} - x_H \\ y_{H'} - y_{A'} = y_{A'} - y_H \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_{H'} = 2x_{A'} - x_H = 9 \\ y_{H'} = 2y_{A'} - y_H = 6 \end{cases}.$$

Conclusion : $H' (9, 6)$.

13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

$$\text{On a } (x_{H'} - 4)^2 + (y_{H'} - 6)^2 = 25 \text{ donc } H' \in \mathcal{C}.$$

Exercice 2. COMPLEXES ET POLYGONE RÉGULIER

On pose

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}, \quad S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

14. Montrer que $\sum_{k=0}^6 \omega^k = 0$.

On constate que $\omega^7 = e^{i2\pi} = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 \omega^k &= \frac{\omega^7 - 1}{\omega - 1} && \text{car } \omega \neq 1 \\ &= 0 && \text{car } \omega^7 = 1. \end{aligned}$$

15. Justifier que $\omega^8 = \omega$, que $\omega^9 = \omega^2$ et que $\omega^{10} = \omega^3$.

Comme $\omega^7 = 1$, on a $\omega^8 = \omega^7 \times \omega = \omega$, $\omega^9 = \omega^7 \times \omega^2 = \omega^2$ et $\omega^{10} = \omega^7 \times \omega^3 = \omega^3$.

16. Montrer que $S + T = -1$ et que $S \times T = 2$.

$$\begin{aligned} S + T &= \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 \\ &= \sum_{k=0}^6 \omega^k - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S \times T &= (\omega + \omega^2 + \omega^4) (\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\ &= \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= \sum_{k=0}^6 \omega^k + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 2 = 0$.

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i} \right\}$$

18. À l'aide d'une construction géométrique, justifier que la partie imaginaire de S est positive.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(S) &= \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}_{\leq 0} \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ &= \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{car } \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

19. En déduire les valeurs exactes de S et de T .

D'après les relations coefficients/racines, S et T sont les solutions de l'équation $z^2 + z + 2 = 0$. De plus $\operatorname{Im}(S)$ est positive. Donc

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i} \quad \text{et} \quad T = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i}.$$

20. En remarquant que S et T sont deux nombres complexes conjugués, déterminer les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

et de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) &= \operatorname{Re}(\omega + \omega^2 + \omega^4) \\ &= \operatorname{Re}(S) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) &= \operatorname{Im}(\omega + \omega^2 + \omega^4) \\ &= \operatorname{Im}(S) \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

On pose

$$P(z) = (1 - z)(1 - z^2)(1 - z^4).$$

21. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$1 - e^{\mathbf{i}\theta} = -2\mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}.$$

En déduire que le module de $1 - e^{\mathbf{i}\theta}$ est égal à $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$.

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On a

$$\begin{aligned} -2\mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} &= -2\mathbf{i} \frac{e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} - e^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}}{2\mathbf{i}} e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} \\ &= -\left(e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} - e^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right) e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} \\ &= -(e^{\mathbf{i}\theta} - 1) \\ &= 1 - e^{\mathbf{i}\theta}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |1 - e^{i\theta}| &= \left| -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \\ &= |-2i| \times \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \times \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \\ &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 1 \end{aligned}$$

car, lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$, $\frac{\theta}{2} \in [0, \pi]$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$.

22. Développer $P(z)$.

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 - z)(1 - z^2)(1 - z^4) \\ &= (1 - z - z^2 + z^3)(1 - z^4) \\ &= 1 - z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + z^6 - z^7. \end{aligned}$$

23. En déduire la valeur exacte de $P(\omega^2)$.

On a

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= 1 - \omega^2 - \omega^4 + \omega^6 - \omega^8 + \omega^{10} + \omega^{12} - \omega^{14} \\ &= 1 - \omega^2 - \omega^4 + \omega^6 - \omega + \omega^3 + \omega^5 - 1 \\ &= -(\omega + \omega^2 + \omega^4) + (\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\ &= -S + T \\ &= -\sqrt{7}i. \end{aligned}$$

Conclusion : $P(\omega^2) = -\sqrt{7}i$.

24. En calculant le module de $P(\omega^2)$ de deux façons différentes, déterminer la valeur exacte de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

D'une part,

$$|P(\omega^2)| = |-\sqrt{7}i| = \sqrt{7}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |P(\omega^2)| &= \left| \left(1 - e^{i\frac{4\pi}{7}}\right) \left(1 - e^{i\frac{8\pi}{7}}\right) \left(1 - e^{i\frac{16\pi}{7}}\right) \right| \\ &= \left| 1 - e^{i\frac{4\pi}{7}} \right| \times \left| 1 - e^{i\frac{8\pi}{7}} \right| \times \left| 1 - e^{i\frac{16\pi}{7}} \right| \\ &= 2 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times 2 \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \left| 2 \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \right| \\ &= 2 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times 2 \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \left(-2 \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) \\ &= -8 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$-8 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sqrt{7}$$

donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{8}.$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice 1. DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A = (-1, 6)$, $B = (4, 1)$ et $C = (7, 2)$ trois points de $\mathcal{P}$.

On note :

- H l'orthocentre du triangle ABC ,
- Ω le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC ,
- G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Calculer l'aire du triangle ABC .
2. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.
Justifier que $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC .
3. Déterminer une équation de $\mathcal{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC .
4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
5. On note :
 - A' le milieu du segment $[BC]$,
 - B' le milieu du segment $[AC]$,

Placer les points A' et B' sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul)

6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.
Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.
7. Déterminer une équation de Δ_2 , médiatrice du segment $[AC]$.
8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
9. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.
11. Montrer que les points H , Ω et G sont alignés.

On note :

H' l'image du point H par la symétrie centrale de centre A' .

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).
13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 2. COMPLEXES ET POLYGONE RÉGULIER

On pose

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}} \quad , \quad S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

14. Montrer que $\sum_{k=0}^6 \omega^k = 0$.

15. Justifier que $\omega^8 = \omega$, que $\omega^9 = \omega^2$ et que $\omega^{10} = \omega^3$.

16. Montrer que $S + T = -1$ et que $S \times T = 2$.

17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 2 = 0$.

18. À l'aide d'une construction géométrique, justifier que la partie imaginaire de S est positive.

19. En déduire les valeurs exactes de S et de T .

20. En remarquant que S et T sont deux nombres complexes conjugués, déterminer les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

et de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

On pose

$$P(z) = (1 - z)(1 - z^2)(1 - z^4).$$

21. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

En déduire que le module de $1 - e^{i\theta}$ est égal à $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$.

22. Développer $P(z)$.

23. En déduire la valeur exacte de $P(\omega^2)$.

24. En calculant le module de $P(\omega^2)$ de deux façons différentes, déterminer la valeur exacte de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

Correction DS 4.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \int_0^1 \frac{1}{x} \arctan(x) dx \\
 &= \left[x \arctan(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= \arctan(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).
 \end{aligned}$$

CC: $\int_0^1 \arctan(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$

$\textcircled{2} \quad I: n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

$C: n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair.}$

On suppose que n est un entier impair.

Alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

donc $n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\text{entier}}) + 1$ donc n^2 est

impair.

On a montré C , or $I \Leftrightarrow C$, donc I est vraie.

CC: $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

$\textcircled{3} \quad \frac{1 \leq x < y}{1 \leq x < y} \Leftrightarrow (1 \leq x) \text{ et } (x < y)$
 $\Leftrightarrow (1 > x) \text{ ou } (x \geq y).$

$\textcircled{4} \quad \frac{xy=0}{xy=0} \Leftrightarrow (x=0) \text{ ou } (y=0)$
 $\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.$

$\textcircled{5} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$

or $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $e^x + \frac{1}{e^x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

CC: f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$\textcircled{6} \quad \text{Soit } x \in \mathbb{R}$
 $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$

CC: $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow f$ est impaire et C_f symétrique/O.

$$\textcircled{7} \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{avec } \begin{aligned} u(x) &= e^x - e^{-x} \\ v(x) &= e^x + e^{-x} \\ u'(x) &= e^x + e^{-x} \\ v'(x) &= e^x - e^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\text{D'une part} \quad f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2$$

$$= 1 - f(x)^2$$

$$\text{CC: } \left| \begin{aligned} f'(x) &= 1 - f(x)^2 = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right.$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^{-x}}{e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

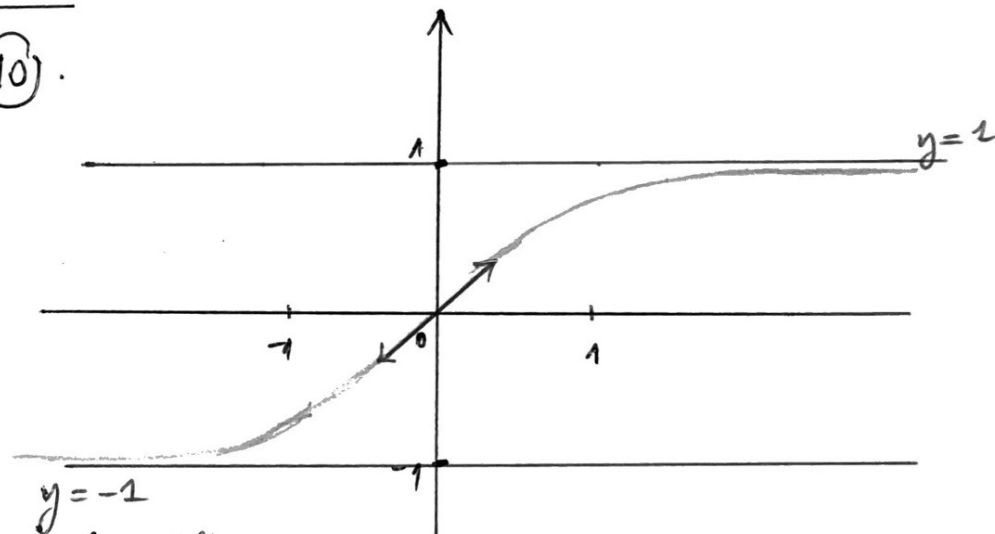
$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

$$\text{CC: } \left| \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1 \\ \text{et } \mathcal{C}_f &\text{ admet une Asymptote horizontale} \\ &\text{d'équation } y = 1 \text{ au voisinage} \\ &\text{de } +\infty. \end{aligned} \right.$$

$$\textcircled{9} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	1	+
$f(x)$	0	1

$\textcircled{10}.$



Compléter par symétrie sur $\mathbb{R}^-$

$\mathcal{C}_f$ sym/O (O: origine du repère).

$\textcircled{11}.$ f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ (THEOREME DE LA BIJECTION)

(12). f est dérivable sur $\mathbb{R}$
 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$
 (et donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)
 Donc f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$
 et pour tout $x \in] -1, 1[$;

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{1 - f(f^{-1}(x))^2} \quad \text{d'après (7)} \\ &= \frac{1}{1 - x^2}.\end{aligned}$$

CC: $\forall x \in] -1, 1[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

(13). $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\sin b}{\cos b}} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \quad \square.\end{aligned}$$

(14). $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

(15) $\arctan(0) = 0$
 et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$

(16) $\frac{1}{2} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} \quad \checkmark$

donc $\frac{1}{2} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

$\frac{1}{5} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{25} < \frac{1}{3} \quad \checkmark$

donc $\frac{1}{5} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

$\frac{1}{8} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{64} < \frac{1}{3} \quad \checkmark$

donc $\frac{1}{8} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

(17). $\frac{1}{2} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow \arctan(0) < \arctan \frac{1}{2} < \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{6}.$
 car $\arctan$ est strictement
 croissante sur $\mathbb{R}$
 De même $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ et $0 < \gamma < \frac{\pi}{6}.$

Ainsi $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$

ie $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

(18) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \# \tan \alpha = \tan(\arctan \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$

$$= \frac{1/2 + 1/5}{1 - 1/2 \times 1/5} \times \frac{10}{10}$$

$$= \frac{5 + 2}{10 - 1}$$

$$= \frac{7}{9}.$$

On a bien $\tan(\alpha + \beta) = \frac{7}{9}.$

(19) $\tan((\alpha + \beta) + \gamma) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma}.$

$$= \frac{7/9 + 1/8}{1 - \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}} \times \frac{9 \times 8}{9 \times 8}.$$

$$= \frac{56 + 9}{72 - 7}$$

$$= \frac{65}{65} = 1.$$

(20) $\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y)$
 $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } y \in \mathbb{R}.$

$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1 \text{ et } \alpha + \beta + \gamma \in]-\pi/2, \pi/2[$

d'où $\alpha + \beta + \gamma = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. INTÉGRATION PAR PARTIES

1. Déterminer

$$\int_0^1 \arctan(x) \, dx$$

à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2. LOGIQUE

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par contraposée que

$$n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair.}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. « $1 \leq x < y$ » est la conjonction de deux propositions. Lesquelles ? Nier cette proposition.

4. « $xy = 0$ » est la disjonction de deux propositions. Lesquelles ? Nier cette proposition (avec des propositions portant séparément sur x et/ou y).

Exercice 3. ÉTUDE D'UNE FONCTION

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

5. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que la fonction f est impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - f(x)^2 = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

9. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
10. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
11. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I , un intervalle à préciser.

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

12. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in I$.

Exercice 4. LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES RÉCIPROQUES

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$

On introduit les notations suivantes :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right), \quad \gamma = \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$

13. Montrer que pour tout $(a, b) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

14. Déterminer $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

15. Donner les valeurs de $\arctan(0)$ et de $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

16. Justifier que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}$ appartiennent à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

17. En déduire que $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

18. Calculer $\tan(\alpha + \beta)$ et vérifier que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{7}{9}.$$

19. Calculer $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$.

20. Conclure.

DEVOIR SURVEILLÉ N°4 (version 2)

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. INTÉGRATION PAR PARTIES

1. Déterminer

$$\int_0^1 \arcsin(x) \, dx$$

à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2. LOGIQUE

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note I l'implication n^2 pair $\implies n$ pair.

Quelle est la contraposée de cette implication ?

3. La démontrer.

4. Conclure.

5. Raisonnement par l'absurde : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3. ÉTUDE DE FONCTIONS

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces fonctions sont appelées *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

7. Étudier la parité des fonctions ch et sh . Que peut-on en déduire concernant le graphe de chacune de ces fonctions ?

8. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.

9. Dresser le tableau de variations de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.

10. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I , un intervalle à préciser.

On note $\operatorname{argsh} : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque ($\operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1}$).

11. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que :

$$\operatorname{sh}(x) = y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

12. Résoudre l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^{+*}$

13. En déduire que $\operatorname{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$.

Exercice 4. LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES RÉCIPROQUES

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{16}{65}\right).$$

On introduit les notations suivantes :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right), \quad \beta = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right), \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{16}{65}\right).$$

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

et que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

14. Vérifier que

$$\cos(\alpha) = \frac{12}{13} \quad \text{et} \quad \cos(\beta) = \frac{3}{5}.$$

15. Déterminer $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

16. Justifier que

$$0 < \frac{5}{13} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

17. En déduire que

$$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$

18. Calculer $\cos(\alpha + \beta)$ et vérifier que

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}.$$

19. En déduire que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2}.$$

20. Déterminer $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ et conclure.

DS 5 - Eléments de correction.

1. Données : $u_0 = 10$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

On pose $H_n: 3 \leq u_n \leq 4$

Initialisation: $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = 4$

donc $3 \leq u_1 \leq 4$ donc H_1 est vraie

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n vraie et on montre $H_{n+1}: 3 \leq u_{n+1} \leq 4$.

$$3 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 9 \leq u_n + 6 \leq 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{9} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{10} \leq \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq 4$$

Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \leq u_n \leq 4$.

2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1+3x^2$ (E)

$$\Leftrightarrow y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{1+3x^2}{1+x^2}$$

$$a(x) = \frac{2x}{1+x^2} \xrightarrow{(P)} A(x) = \ln(|x^2+1|)$$

$$y_H(x) = C e^{-A(x)} = C e^{-\ln(x^2+1)} = C \times \frac{1}{1+x^2}$$

avec $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière de (E)

$$y_p(x) = C(x) \times \frac{1}{1+x^2}$$

avec $C'(x) = b(x) e^{A(x)}$

$$= \frac{1+3x^2}{1+x^2} \times (1+x^2)$$

$$= 1+3x^2$$

$C(x) = x+x^3$ convient.

$$y_p(x) = (x+x^3) \times \frac{1}{1+x^2}$$

Conclusion: $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \frac{C+x+x^3}{1+x^2}$

avec C à déterminer

Condition initiale: $y(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

D'où $\boxed{y(x) = \frac{1+x+x^3}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}}$

3. Une solution particulière de (E_1) est $\ln(x)$

En effet $[\ln(x)]' + \ln(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

4. $y'' + 5y' + 6y = 0$ (H_2).

Polynôme caractéristique associé:

$$P(x) = x^2 + 5x + 6.$$

P admet deux racines: $r_1 = -3$ et $r_2 = -2$.

D'où $\boxed{y_{H_2}(x) = A e^{-3x} + B e^{-2x}}$

avec $A, B \in \mathbb{R}$

$$5. \left. \begin{aligned} f(x) &= g(x)e^{-2x} \\ f'(x) &= [g'(x) - 2g(x)]e^{-2x} \\ f''(x) &= [g''(x) - 4g'(x) + 4g(x)]e^{-2x} \end{aligned} \right\} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$f(x)$ solution de (E_2)

$$\text{ssi } f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = \frac{x \ln(x) + 1}{xe^{2x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{ssi } [g''(x) - 4g'(x) + 4g(x) + 5g'(x) - 10g(x) + 6g(x)]e^{-2x} = \frac{x \ln(x) + 1}{x} e^{-2x} \quad \forall x > 0$$

$$\text{ssi } g''(x) + g'(x) = \frac{x \ln(x) + 1}{x} \quad \forall x > 0$$

$$\text{ssi } [g'(x)]' + g'(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

ssi $g'(x)$ est solution de (E_1) .

Ainsi : f solution de (E_2) ssi g' est solution de (E_1)

6. Soit g telle que $g'(x) = \ln(x)$ (Q3)
Par exemple $g(x) = x \ln(x) - x$ (par IPP)

On pose $g(x) = x \ln(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Alors $g'(x)$ est solution de (E_1)

Donc $f(x) = g(x)e^{-2x}$ est solution de (E_2)
d'après (5)

Ainsi une solution particulière de (E_2) est $f(x) = (x \ln(x) - x)e^{-2x}$. (pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$)

7. Conclusion :

$$\mathcal{S}_{E_2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ae^{-3x} + Be^{-2x} + (x \ln x - x)e^{-2x} \end{array} \right\} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

8. $Q_1 \cap Q_2$?

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{D}: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

9. $P_m: (1+m)x + (2-m)y + (-1+2m)z + (1-2m) = 0$.

équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$
orthogonal à $\vec{n}_m(1+m, 2-m, -1+2m)$.
non nul pour tout m réel.

10. Soit $M(x, y, z) \in \textcircled{D}$

Alors $M \in Q_1 \cap Q_2$ et donc $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Donc $(x+2y-z+1)+m(x-y+2z-2) = 0+m \times 0 = 0$
 D'où $M \in P_m$.

Conclusion : $\forall M \in \mathcal{D}$, on a $M \in P_m$
 d'où $\mathcal{D} \subset P_m$.

$$\begin{aligned} 11. \quad P_m \perp Q_1 &\Leftrightarrow \vec{n}_m \perp \vec{n}_{Q_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+m \\ 2-m \\ 2m-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+m) + 2(2-m) - (2m-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6 - 3m = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 2 \end{aligned}$$

Cel : $Q_1 \perp P_2$

$$\begin{aligned} 12. \quad \mathcal{Y}: \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

$\mathcal{Y}$ est la sphère de centre $\Omega(-1, 2, 0)$ et de rayon $r=2$.

$$\begin{aligned} 13. \quad d_m &= d(\Omega, P_m) \\ &= \frac{|14-5m|}{\sqrt{(1+m)^2 + (2-m)^2 + (2m-1)^2}} \\ &= \frac{|14-5m|}{\sqrt{6m^2 - 6m + 6}} \end{aligned}$$

14. P_m tangent à $\mathcal{Y}$

$$\text{ssi } d(\Omega, P_m) = 2$$

$$\text{ssi } \frac{|14-5m|}{\sqrt{6m^2 - 6m + 6}} = 2$$

$$\text{ssi } |14-5m| = 2\sqrt{6m^2 - 6m + 6}$$

$$\text{ssi } (4-5m)^2 = 4(6m^2 - 6m + 6)$$

$$\text{ssi } 16 - 40m + 25m^2 = 24m^2 - 24m + 24$$

$$\text{ssi } m^2 - 16m - 8 = 0$$

$$\Delta = 16^2 + 4 \times 8 = 4 \times 8 \times 9 = 4 \times 4 \times 2 \times 9 \quad \left(\sqrt{\Delta} = 4 \times 3 \times \sqrt{2} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} m_1 = \frac{16 - 12\sqrt{2}}{2} & m_2 = \frac{16 + 12\sqrt{2}}{2} \end{array} \right) \text{ INUTILE } (*)$$

$$\left(\begin{array}{ll} m_1 = 8 - 6\sqrt{2} & m_2 = 8 + 6\sqrt{2} \end{array} \right)$$

$$15. \quad d_1 = d(\Omega, P_1) = \frac{|14-5|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 2$$

donc $P_1 \cap \mathcal{Y}$ est le cercle de centre H (projeté orthogonal de Ω sur P_1)

$$\text{de rayon } \rho = \sqrt{r^2 - d_1^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{23}{6}}$$

inclus dans P_1 .

$(*) \Delta > 0$, donc $m^2 - 16m - 8 = 0$ admet deux solutions distinctes réelles

CC: il existe 2 plans (P_{m_1}, P_{m_2}) tangents à $\mathcal{Y}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice 1. RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 10 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3 \leq u_n \leq 4$.

Exercice 2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Partie A.

2. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = 1 + 3x^2 & \text{sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Partie B.

On considère l'équation différentielle

$$(E1) : y' + y = \ln(x) + \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

3. Déterminer (sans calculs) une solution particulière de l'équation (E1).

On considère l'équation différentielle

$$(E2) : y'' + 5y' + 6y = \frac{x \ln(x) + 1}{xe^{2x}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

4. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E2).

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, deux fois dérivable. On considère la fonction g définie par pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$g(x) = f(x)e^{2x}.$$

5. Montrer que : $g'(x)$ est solution de (E1) si et seulement si $f(x)$ est solution de (E2).

6. En déduire une solution particulière de l'équation (E2), à l'aide d'une intégration par parties.

7. Résoudre l'équation (E2).

Exercice 3. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ d'équations :

$$\mathcal{Q}_1 : x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_2 : x - y + 2z - 2 = 0.$$

8. Montrer que $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ est une droite $\mathcal{D}$ dont on précisera une représentation paramétrique.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble d'équation

$$\mathcal{P}_m : (x + 2y - z + 1) + m(x - y + 2z - 2) = 0.$$

9. Justifier que $\mathcal{P}_m$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}_m(1 + m, 2 - m, 2m - 1)$.
10. Montrer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_m$.
11. Parmi les plans $\mathcal{P}_m$, en existe-t-il un qui soit perpendiculaire à $\mathcal{Q}_1$? Si oui, lequel ?
12. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Vérifier que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r .

13. On note d_m la distance du point Ω au plan $\mathcal{P}_m$. Montrer que

$$d_m = \frac{|4 - 5m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2 - m + 1}}.$$

14. Existe-t-il des plans $\mathcal{P}_m$ tangents à la sphère $\mathcal{S}$? Si oui, combien ?
15. Justifier que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera le centre H et le rayon ρ .

16. Déterminer une équation de la sphère Σ circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 : x + y + z &= 0 & , \\ \mathcal{F}_2 : x + y - z &= 2 & , \\ \mathcal{F}_3 : x - y + z &= 4 & , \\ \mathcal{F}_4 : x - y - z &= -6 & . \end{aligned}$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°6 - Mathématiques

Correction

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient $A = X^4 + 2X^3 + X + 1$ et $B = X^2 - 2X + 2$.

1. Effectuer la division euclidienne de A par B . On note Q le quotient et R le reste de cette division euclidienne.

Correction : $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ avec $Q(X) = X^2 + 4X + 6$ et $R(X) = 5X - 11$.

2. Calculer $B(1+i)$.

Correction : $B(1+i) = 0$

3. En déduire $A(1+i)$.

Correction :

On a $A(1+i) = B(1+i)Q(1+i) + R(1+i) = R(1+i) = 5(1+i) - 11 = -6 + 5i$.

Conclusion : $A(1+i) = -6 + 5i$

Exercice 2. PUISSANCES D'UNE MATRICE ET SUITES IMBRIQUÉES

On considère les matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

Correction : $\det P = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Vérifier que $AP = PL$.

Correction : $AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $PL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $AP = PL$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PL^n P^{-1}$.

Correction : On procède par récurrence.

Initialisation : $AP = PL$, donc $APP^{-1} = PLP^{-1}$, donc $A = PLP^{-1}$ (la propriété est vérifiée lorsque $n = 1$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = PL^n P^{-1}$.

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PL^n P^{-1} PLP^{-1} \\ &= PL^n LP^{-1} \\ &= PL^{n+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PL^n P^{-1}$.

7. On pose $J = L - I$. Calculer J^3 .

Correction : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi pour tout $n \geq 3$,

$$J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

Correction : $L = J + I$. Comme $IJ = J = JI$, on a

$$\begin{aligned} L^n &= (J + I)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k && \text{or } J^k = 0 \text{ pour } k \geq 3 \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 && \text{lorsque } n \geq 2 \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 2$, $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$.

9. Expliciter les neuf coefficients de la matrice L^n pour $n \geq 2$. Vérifier que cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

Correction : Pour $n \geq 2$, on a

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification pour $n = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = L^0$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

Vérification pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L = L^1$, donc l'égalité est vérifiée pour $n = 1$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= PL^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérification en $n = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$. L'égalité est encore valable en $n = 0$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définie par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

$$\text{Correction : } AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

12. En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

13. Déterminer l'expression des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Correction : Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) + 4n \\ 2n + 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, $v_n = 2n^2 + 2n$ et $w_n = 2n + 2$.

Exercice 3. SUITES RÉCURRENTES (CCINP TPC 2019)

Soit la fonction f définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$.

14. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

Correction : f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et pour tout

$$x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Variations de f : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 3]$ est strictement décroissante.

15. Montrer que :

$$f(x) = x \iff x^3 + x - 3 = 0.$$

Correction :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{3}{1+x^2} = x \\ &\iff 3 = x(1+x^2) \\ &\iff 0 = x^3 + x - 3. \end{aligned}$$

16. Dresser le tableau de variations de la fonction $g(x) = x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}^+$.

Correction : g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (fonction polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.

Variations de g : La fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [-3, +\infty[$ est strictement croissante.

17. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, noté α , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

Correction : La fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [-3, +\infty[$ est continue et strictement croissante, donc bijective (théorème de la bijection).

Comme $0 \in [-3, +\infty[$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(\alpha) = 0$. De plus

$$f(x) = x \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha.$$

α est donc l'unique solution à l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $g(1) = -1 < 0$ et $g(2) = 7 > 0$, donc $1 < \alpha < 2$.

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = f \circ f(x) - x.$$

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2 + 1)^2 + 9}.$$

18. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes : α , β et β' avec

$$0 < \beta < \alpha < \beta',$$

où α est le réel défini à la question 17.

Correction :

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff (x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3) = 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ ou } x^3 + x - 3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \alpha. \end{aligned}$$

On note $\beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\beta' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Par application numérique, on a bien

$$0 < \beta < \alpha < \beta'.$$

19. Justifier que $1 + \beta^2 = 3\beta$.

Correction : β est une solution de $x^2 - 3x + 1 = 0$, donc $\beta^2 - 3\beta + 1 = 0$, donc $1 + \beta^2 = 3\beta$.

20. Montrer que $f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'$.

On admettra de même que $f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$.

Correction :

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{3}{1 + \beta^2} \\ &= \frac{3}{3\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{2(3 + \sqrt{5})}{3^2 - \sqrt{5}^2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \beta'. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'}.$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On définit (v_n) et (w_n) deux sous-suites de (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

21. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

Correction : $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$ et $f \circ f(v_n) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}$ donc $\boxed{v_{n+1} = f \circ f(v_n)}.$

De même, $w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$ et $f \circ f(w_n) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$ donc $\boxed{w_{n+1} = f \circ f(w_n)}.$

22. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Correction : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 &\implies f(x_1) \geq f(x_2) \geq 0 && \text{car } f \text{ est décroissante et à valeurs dans } \mathbb{R}^+ \\ &\implies f(f(x_1)) \leq f(f(x_2)) && \text{car } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 \leq x_2 \implies f \circ f(x_1) \leq f \circ f(x_2)$.

La fonction $f \circ f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.

23. Montrer que pour tout $x \in [0, \beta]$, $f \circ f(x) \in [0, \beta]$.

Correction : Par croissance de $f \circ f$ de $\mathbb{R}^+$, on a

$$0 \leq x \leq \beta \implies f \circ f(0) \leq f \circ f(x) \leq f \circ f(\beta).$$

De plus $f \circ f(0) = f(f(0)) = f(3) = \frac{3}{10}$ et $f \circ f(\beta) = f(f(\beta)) = f(\beta') = \beta$ d'après Q20. Ainsi

$$0 \leq x \leq \beta \implies 0 \leq \frac{3}{10} \leq f \circ f(x) \leq \beta.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, \beta], f \circ f(x) \in [0, \beta]}.$

24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, \beta]$.

Correction : On procède par récurrence.

$v_0 = u_0 = 0$ donc $v_0 \in [0, \beta]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \in [0, \beta]$. Alors $f \circ f(v_n) \in [0, \beta]$ d'après Q22, et donc $v_{n+1} \in [0, \beta]$ d'après Q21.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, \beta]}.$

Dans la suite du problème, on admet que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [\beta', 3]$,
- la suite (v_n) est croissante,
- la suite (w_n) est décroissante.

25. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

Correction : La suite (v_n) est croissante et majorée par β , donc converge vers ℓ d'après le théorème de la limite monotone.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$. Par passage à la limite, on a $\ell = f \circ f(\ell)$, donc $f \circ f(\ell) - \ell = 0$, c'est-à-dire $h(\ell) = 0$, donc $\ell \in \{\beta, \alpha, \beta'\}$. De plus $v_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \in [0, \beta]$, d'où $\ell = \beta$.

La suite (w_n) est décroissante et minorée par β' , donc converge vers ℓ' . On montre de manière similaire que $\ell' = \beta'$.

Conclusion : $\lim v_n = \beta$ et $\lim w_n = \beta'$.

26. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Correction : Si (u_n) admet une limite, alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite. Or (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux limites distinctes : β et β' . Donc (u_n) n'admet pas de la limite et la suite (u_n) n'est pas convergente.

DEVOIR SURVEILLÉ N°6 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient

$$A = X^4 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 - 2X + 2.$$

- Effectuer la division euclidienne de A par B . On note Q le quotient et R le reste de cette division euclidienne.
- Calculer $B(1+i)$.
- En déduire $A(1+i)$.

Exercice 2. PUISSANCES D'UNE MATRICE ET SUITES IMBRIQUÉES

On considère les matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- Vérifier que $AP = PL$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PL^n P^{-1}$.
- On pose $J = L - I$. Calculer J^3 .
- En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

- Expliciter les neuf coefficients de la matrice L^n pour $n \geq 2$. Vérifier que cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définie par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .
- Déterminer l'expression des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Exercice 3. SUITES RÉCURRENTES (CCINP TPC 2019)

Soit la fonction f définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$.

14. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

15. Montrer que :

$$f(x) = x \iff x^3 + x - 3 = 0.$$

16. Dresser le tableau de variations de la fonction $g(x) = x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}^+$.

17. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, noté α , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = f \circ f(x) - x.$$

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2 + 1)^2 + 9}.$$

18. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes : α , β et β' avec

$$0 < \beta < \alpha < \beta',$$

où α est le réel défini à la question 17.

19. Justifier que $1 + \beta^2 = 3\beta$.

20. Montrer que $f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'$.

On admettra de même que $f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On définit (v_n) et (w_n) deux sous-suites de (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

21. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

22. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

23. Montrer que pour tout $x \in [0, \beta]$, $f \circ f(x) \in [0, \beta]$.

24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, \beta]$.

Dans la suite du problème, on admet que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [\beta', 3]$,
- la suite (v_n) est croissante,
- la suite (w_n) est décroissante.

25. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

26. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 - Mathématiques

Correction

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions $\cosh$ et $\sinh$.

Correction. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(-t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh(t)$ et $\sinh(-t) = \frac{e^{-t} - e^t}{2} = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} = -\sinh(t)$.
Ainsi $\cosh$ est une fonction paire et $\sinh$ est une fonction impaire.

2. Montrer que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.

Correction. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de ces deux fonctions.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[e^t]' = e^t$ et $[e^{-t}]' = -e^{-t}$. Ainsi

$$\cosh'(t) = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}]' = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \sinh(t) \text{ et}$$

$$\sinh'(t) = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}]' = \frac{1}{2} (e^t - (-e^{-t})) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) = \cosh(t).$$

3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.

Correction. On rappelle que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $[u(t)^2]' = 2u'(t)u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ici f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cosh'(t) \cosh(t) - 2 \sinh'(t) \sinh(t) \\ &= 2 \sinh(t) \cosh(t) - 2 \cosh(t) \sinh(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0) = 1$.

Conclusion : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$.

4. Tracer les tableaux de variations des fonctions cosh et sinh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de cosh et de sinh en 0.
5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α .

Correction. La fonction $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection. Ainsi 1 admet un unique antécédent par $\sinh$, que l'on note α :

$$\sinh(\alpha) = 1.$$

6. On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

Correction. Par définition $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1$, donc $\frac{z - z^{-1}}{2} = 1$, donc $z - z^{-1} = 2$, donc $z - z^{-1} - 2 = 0$, d'où $z^2 - 1 - 2z = 0$.

Conclusion : $z^2 - 2z - 1 = 0$.

7. En déduire la valeur exacte de α .

Correction. On a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z - 1 = 0 &\iff z = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \\ &\iff z = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = 1 + \sqrt{2} \\ &\iff z = 1 + \sqrt{2} && \text{car } z = e^\alpha > 0 \text{ et } 1 - \sqrt{2} < 0 \\ &\iff \alpha = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Conclusion : $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.

8. Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$

Correction. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $e \simeq 2,7$, on a $1 \leq 1 + \sqrt{2} \leq e$ et donc $\ln(1) \leq \ln(1 + \sqrt{2}) \leq \ln(e)$ (par croissance de la fonction $\ln$), c'est-à-dire $0 \leq \alpha \leq 1$.

9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Correction. On sait que $\cosh(\alpha)^2 - \sinh(\alpha)^2 = 1$ (d'après Q3), or $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\cosh(\alpha)^2 = 2$, donc $\cosh(\alpha) = -\sqrt{2}$ ou $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$. Comme $\cosh(t) \geq 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (d'après Q4), on en déduit $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^\alpha (\sinh t)^{2n} dt.$$

10. Déterminer I_0 .

Correction. $I_0 = \alpha$.

11. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

Que peut-on en déduire ?

Correction. La fonction $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ étant positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$, on a $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par positivité de l'intégrale). De plus,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+2} dt - \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} dt \\ &= \int_0^\alpha (\sinh(t)^{2n+2} - \sinh(t)^{2n}) dt && \text{(par linéarité)} \\ &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} (\sinh(t)^2 - 1) dt \end{aligned}$$

or $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ est positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$ et $0 \leq \sinh(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, \alpha]$, donc $t \mapsto \sinh(t)^2 - 1$ est négative sur $[0, \alpha]$. Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par croissance de l'intervalle).

Conclusion : La suite (I_n) est positive et décroissante et donc convergente (d'après le théorème de la limite monotone). On note ℓ sa limite par la suite.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

Correction. Les fonctions $t \mapsto \sinh(t)^{2n+1}$ et $t \mapsto \cosh(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \alpha]$. On a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+1} \times \sinh(t) dt \\ &= [\sinh(t)^{2n+1} \times \cosh(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n + 1) \cosh(t) \sinh(t)^{2n} \times \cosh(t) dt \\ &= \sinh(\alpha)^{2n+1} \times \cosh(\alpha) - \sinh(0)^{2n+1} \times \cosh(0) - (2n + 1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \cosh(t)^2 dt \\ &= \cosh(\alpha) - (2n + 1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} (\sinh(t)^2 + 1) dt \\ &\quad \text{(car } \sinh(\alpha) = 1 \text{ et } \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \\ &= \cosh(\alpha) - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n) \\ &\quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n + 2} - \left(\frac{2n + 1}{2n + 2} \right) I_n.$$

Correction. D'après Q9, on a montré que

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n)$$

donc

$$(2n+2)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)I_n$$

donc

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction. Par passage à la limite dans la dernière relation obtenue, on a

$$\ell = 0 - 1 \times \ell$$

et donc $2\ell = 0$, d'où $\ell = 0$.

Conclusion : $\lim I_n = 0$.

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α , solution de l'équation $\sinh(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a < \varepsilon$.

```
from math import sinh

def dichotomie(eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>=eps :
        c=float(a+b)/2
        if (sinh(c)-1)<0 :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I = \int_1^e \ln(x) \, dx.$$

Correction. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$. On a

$$\begin{aligned} I &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\ &= e \ln(e) - 0 - (e - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion : $I = 1$.

17. En posant $x = \sqrt{t}$, déterminer

$$J = \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Correction. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et en particulier sur $[1, e^2]$. On a, par changement de variables,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{e^2} 2 \ln(t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt \\ &= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{e^2}} 2 \ln(x^2) \, dx \\ &= \int_1^e 4 \ln(x) \, dx \\ &= 4I \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion $J = 4$.

Partie B

18. En posant $x = 1 + e^t$, déterminer

$$K = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} \, dt.$$

Correction. La fonction $t \mapsto 1 + e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et par changement de variables, on a

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{e^t}{(1 + e^t)e^t(1 + e^{-t})} \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)^2} e^t \, dt \\ &= \int_{1+e^0}^{1+e^1} \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{1+e} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}. \end{aligned}$$

Conclusion : $K = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}$.

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

Correction. $D_f = \mathbb{R}^*$.

20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

Correction. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Comme $\lim_{0^-} f \neq \lim_{0^+} f$, la fonction f n'est pas prolongeable en 0.

21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Correction. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition. D'où f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (par somme).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan'(x) + \left[\frac{1}{x}\right]' \arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

22. En déduire que pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Correction. La fonction f est constante sur $]0, +\infty[$ (car f' est nulle) et pour tout $x > 0$:

$$f(x) = f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : Pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a > 0$. On note

$$I_a = \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt \quad \text{et} \quad J_a = \int_{1/2}^2 \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt.$$

23. Calculer $I_a + J_a$.

Correction.

$$\begin{aligned}
 I_a + J_a &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} + \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt && \text{(par linéarité)} \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \arctan(2) - \arctan(1/2).
 \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a + J_a = \arctan(2) - \arctan(1/2)$.

24. En posant $x = \frac{1}{t}$, montrer que $I_a = J_a$.

Correction. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2; 2]$. Par changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
 I_a &= \int_{1/2}^2 \frac{-t^2}{(1+t^2)(1+t^a)} \times \frac{1}{-t^2} dt \\
 &= - \int_2^{1/2} \frac{(1/x)^2}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} dx \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{x^2 \times x^a \times \left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) x^a \left(1 + \frac{1}{x^a}\right)} dx \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)} dx \\
 &= J_a.
 \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a = J_a$.

25. En déduire que $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

Correction. En utilisant les résultats Q23 et Q24, on a

$$\begin{aligned}
 2I_a &= \arctan(2) - \arctan(1/2) \\
 &= \arctan(2) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right) && \text{d'après Q22} \\
 &= 2\arctan(2) - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

D'où $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice interdite

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions $\cosh$ et $\sinh$.
2. Montrer que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.
3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.
4. Tracer les tableaux de variations des fonctions $\cosh$ et $\sinh$. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de $\cosh$ et de $\sinh$ en 0.
5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α .
6. On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

7. En déduire la valeur exacte de α .
8. Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$.
9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^\alpha (\sinh t)^{2n} dt.$$

10. Déterminer I_0 .
11. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right) I_n.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α , solution de l'équation $\sinh(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a < \varepsilon$.

```
from math import sinh

def dichotomie(eps):
    a=...
    b=...
    while ..... :
        c=float(a+b)/2
        if ..... :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I = \int_1^e \ln(x) \, dx.$$

17. En posant $x = \sqrt{t}$, déterminer

$$J = \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Partie B

18. En posant $x = 1 + e^t$, déterminer

$$K = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} \, dt.$$

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
 20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?
 21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
 22. En déduire que pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a > 0$. On note

$$I_a = \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \, dt \quad \text{et} \quad J_a = \int_{1/2}^2 \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} \, dt.$$

23. Calculer $I_a + J_a$.
 24. En posant $x = \frac{1}{t}$, montrer que $I_a = J_a$.
 25. En déduire que $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°9 - Mathématiques

Correction

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions $\cosh$ et $\sinh$.

Correction. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(-t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh(t)$ et $\sinh(-t) = \frac{e^{-t} - e^t}{2} = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} = -\sinh(t)$.
Ainsi $\cosh$ est une fonction paire et $\sinh$ est une fonction impaire.

2. Montrer que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.

Correction. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de ces deux fonctions.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[e^t]' = e^t$ et $[e^{-t}]' = -e^{-t}$. Ainsi

$$\cosh'(t) = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}]' = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \sinh(t) \text{ et}$$

$$\sinh'(t) = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}]' = \frac{1}{2} (e^t - (-e^{-t})) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) = \cosh(t).$$

3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.

Correction. On rappelle que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $[u(t)^2]' = 2u'(t)u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ici f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cosh'(t) \cosh(t) - 2 \sinh'(t) \sinh(t) \\ &= 2 \sinh(t) \cosh(t) - 2 \cosh(t) \sinh(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0) = 1$.

Conclusion : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$.

4. Tracer les tableaux de variations des fonctions cosh et sinh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de cosh et de sinh en 0.
5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α .

Correction. La fonction $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection. Ainsi 1 admet un unique antécédent par $\sinh$, que l'on note α :

$$\sinh(\alpha) = 1.$$

6. On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

Correction. Par définition $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1$, donc $\frac{z - z^{-1}}{2} = 1$, donc $z - z^{-1} = 2$, donc $z - z^{-1} - 2 = 0$, d'où $z^2 - 1 - 2z = 0$.

Conclusion : $z^2 - 2z - 1 = 0$.

7. En déduire la valeur exacte de α .

Correction. On a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z - 1 = 0 &\iff z = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \\ &\iff z = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = 1 + \sqrt{2} \\ &\iff z = 1 + \sqrt{2} && \text{car } z = e^\alpha > 0 \text{ et } 1 - \sqrt{2} < 0 \\ &\iff \alpha = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Conclusion : $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.

8. Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$

Correction. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $e \simeq 2,7$, on a $1 \leq 1 + \sqrt{2} \leq e$ et donc $\ln(1) \leq \ln(1 + \sqrt{2}) \leq \ln(e)$ (par croissance de la fonction $\ln$), c'est-à-dire $0 \leq \alpha \leq 1$.

9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Correction. On sait que $\cosh(\alpha)^2 - \sinh(\alpha)^2 = 1$ (d'après Q3), or $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\cosh(\alpha)^2 = 2$, donc $\cosh(\alpha) = -\sqrt{2}$ ou $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$. Comme $\cosh(t) \geq 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (d'après Q4), on en déduit $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^\alpha (\sinh t)^{2n} dt.$$

10. Déterminer I_0 .

Correction. $I_0 = \alpha$.

11. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

Que peut-on en déduire ?

Correction. La fonction $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ étant positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$, on a $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par positivité de l'intégrale). De plus,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+2} dt - \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} dt \\ &= \int_0^\alpha (\sinh(t)^{2n+2} - \sinh(t)^{2n}) dt && \text{(par linéarité)} \\ &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} (\sinh(t)^2 - 1) dt \end{aligned}$$

or $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ est positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$ et $0 \leq \sinh(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, \alpha]$, donc $t \mapsto \sinh(t)^2 - 1$ est négative sur $[0, \alpha]$. Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par croissance de l'intervalle).

Conclusion : La suite (I_n) est positive et décroissante et donc convergente (d'après le théorème de la limite monotone). On note ℓ sa limite par la suite.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

Correction. Les fonctions $t \mapsto \sinh(t)^{2n+1}$ et $t \mapsto \cosh(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \alpha]$. On a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+1} \times \sinh(t) dt \\ &= [\sinh(t)^{2n+1} \times \cosh(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n + 1) \cosh(t) \sinh(t)^{2n} \times \cosh(t) dt \\ &= \sinh(\alpha)^{2n+1} \times \cosh(\alpha) - \sinh(0)^{2n+1} \times \cosh(0) - (2n + 1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \cosh(t)^2 dt \\ &= \cosh(\alpha) - (2n + 1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} (\sinh(t)^2 + 1) dt \\ &\quad \text{(car } \sinh(\alpha) = 1 \text{ et } \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \\ &= \cosh(\alpha) - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n) \\ &\quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n + 2} - \left(\frac{2n + 1}{2n + 2} \right) I_n.$$

Correction. D'après Q9, on a montré que

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n)$$

donc

$$(2n+2)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)I_n$$

donc

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction. Par passage à la limite dans la dernière relation obtenue, on a

$$\ell = 0 - 1 \times \ell$$

et donc $2\ell = 0$, d'où $\ell = 0$.

Conclusion : $\lim I_n = 0$.

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α , solution de l'équation $\sinh(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a < \varepsilon$.

```
from math import sinh

def dichotomie(eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>=eps :
        c=float(a+b)/2
        if (sinh(c)-1)<0 :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I = \int_1^e \ln(x) \, dx.$$

Correction. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$. On a

$$\begin{aligned} I &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\ &= e \ln(e) - 0 - (e - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion : $I = 1$.

17. En posant $x = \sqrt{t}$, déterminer

$$J = \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Correction. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et en particulier sur $[1, e^2]$. On a, par changement de variables,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{e^2} 2 \ln(t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt \\ &= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{e^2}} 2 \ln(x^2) \, dx \\ &= \int_1^e 4 \ln(x) \, dx \\ &= 4I \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion $J = 4$.

Partie B

18. En posant $x = 1 + e^t$, déterminer

$$K = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} \, dt.$$

Correction. La fonction $t \mapsto 1 + e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et par changement de variables, on a

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{e^t}{(1 + e^t)e^t(1 + e^{-t})} \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)^2} e^t \, dt \\ &= \int_{1+e^0}^{1+e^1} \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{1+e} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}. \end{aligned}$$

Conclusion : $K = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}$.

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

Correction. $D_f = \mathbb{R}^*$.

20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

Correction. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Comme $\lim_{0^-} f \neq \lim_{0^+} f$, la fonction f n'est pas prolongeable en 0.

21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Correction. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition. D'où f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (par somme).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan'(x) + \left[\frac{1}{x}\right]' \arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

22. En déduire que pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Correction. La fonction f est constante sur $]0, +\infty[$ (car f' est nulle) et pour tout $x > 0$:

$$f(x) = f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : Pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a > 0$. On note

$$I_a = \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt \quad \text{et} \quad J_a = \int_{1/2}^2 \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt.$$

23. Calculer $I_a + J_a$.

Correction.

$$\begin{aligned}
 I_a + J_a &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} + \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt && \text{(par linéarité)} \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \arctan(2) - \arctan(1/2).
 \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a + J_a = \arctan(2) - \arctan(1/2)$.

24. En posant $x = \frac{1}{t}$, montrer que $I_a = J_a$.

Correction. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2; 2]$. Par changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
 I_a &= \int_{1/2}^2 \frac{-t^2}{(1+t^2)(1+t^a)} \times \frac{1}{-t^2} dt \\
 &= - \int_2^{1/2} \frac{(1/x)^2}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} dx \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{x^2 \times x^a \times \left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) x^a \left(1 + \frac{1}{x^a}\right)} dx \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)} dx \\
 &= J_a.
 \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a = J_a$.

25. En déduire que $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

Correction. En utilisant les résultats Q23 et Q24, on a

$$\begin{aligned}
 2I_a &= \arctan(2) - \arctan(1/2) \\
 &= \arctan(2) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right) && \text{d'après Q22} \\
 &= 2 \arctan(2) - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

D'où $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 - Mathématiques

Correction

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions $\cosh$ et $\sinh$.

Correction. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(-t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh(t)$ et $\sinh(-t) = \frac{e^{-t} - e^t}{2} = -\frac{e^t - e^{-t}}{2} = -\sinh(t)$.
Ainsi $\cosh$ est une fonction paire et $\sinh$ est une fonction impaire.

2. Montrer que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.

Correction. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de ces deux fonctions.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[e^t]' = e^t$ et $[e^{-t}]' = -e^{-t}$. Ainsi

$$\cosh'(t) = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}]' = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \sinh(t) \text{ et}$$

$$\sinh'(t) = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}]' = \frac{1}{2} (e^t - (-e^{-t})) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) = \cosh(t).$$

3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.

Correction. On rappelle que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $[u(t)^2]' = 2u'(t)u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ici f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cosh'(t) \cosh(t) - 2 \sinh'(t) \sinh(t) \\ &= 2 \sinh(t) \cosh(t) - 2 \cosh(t) \sinh(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0) = 1$.

Conclusion : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$.

4. Tracer les tableaux de variations des fonctions cosh et sinh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de cosh et de sinh en 0.
5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α .

Correction. La fonction $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection. Ainsi 1 admet un unique antécédent par $\sinh$, que l'on note α :

$$\sinh(\alpha) = 1.$$

6. On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

Correction. Par définition $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1$, donc $\frac{z - z^{-1}}{2} = 1$, donc $z - z^{-1} = 2$, donc $z - z^{-1} - 2 = 0$, d'où $z^2 - 1 - 2z = 0$.

Conclusion : $z^2 - 2z - 1 = 0$.

7. En déduire la valeur exacte de α .

Correction. On a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z - 1 = 0 &\iff z = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \\ &\iff z = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = 1 + \sqrt{2} \\ &\iff z = 1 + \sqrt{2} && \text{car } z = e^\alpha > 0 \text{ et } 1 - \sqrt{2} < 0 \\ &\iff \alpha = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Conclusion : $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.

8. Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$

Correction. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $e \simeq 2,7$, on a $1 \leq 1 + \sqrt{2} \leq e$ et donc $\ln(1) \leq \ln(1 + \sqrt{2}) \leq \ln(e)$ (par croissance de la fonction $\ln$), c'est-à-dire $0 \leq \alpha \leq 1$.

9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Correction. On sait que $\cosh(\alpha)^2 - \sinh(\alpha)^2 = 1$ (d'après Q3), or $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\cosh(\alpha)^2 = 2$, donc $\cosh(\alpha) = -\sqrt{2}$ ou $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$. Comme $\cosh(t) \geq 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (d'après Q4), on en déduit $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^\alpha (\sinh t)^{2n} dt.$$

10. Déterminer I_0 .

Correction. $I_0 = \alpha$.

11. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

Que peut-on en déduire ?

Correction. La fonction $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ étant positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$, on a $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par positivité de l'intégrale). De plus,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+2} dt - \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} dt \\ &= \int_0^\alpha (\sinh(t)^{2n+2} - \sinh(t)^{2n}) dt && \text{(par linéarité)} \\ &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} (\sinh(t)^2 - 1) dt \end{aligned}$$

or $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ est positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$ et $0 \leq \sinh(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, \alpha]$, donc $t \mapsto \sinh(t)^2 - 1$ est négative sur $[0, \alpha]$. Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par croissance de l'intervalle).

Conclusion : La suite (I_n) est positive et décroissante et donc convergente (d'après le théorème de la limite monotone). On note ℓ sa limite par la suite.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

Correction. Les fonctions $t \mapsto \sinh(t)^{2n+1}$ et $t \mapsto \cosh(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \alpha]$. On a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+1} \times \sinh(t) dt \\ &= [\sinh(t)^{2n+1} \times \cosh(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n + 1) \cosh(t) \sinh(t)^{2n} \times \cosh(t) dt \\ &= \sinh(\alpha)^{2n+1} \times \cosh(\alpha) - \sinh(0)^{2n+1} \times \cosh(0) - (2n + 1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \cosh(t)^2 dt \\ &= \cosh(\alpha) - (2n + 1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} (\sinh(t)^2 + 1) dt \\ &\quad \text{(car } \sinh(\alpha) = 1 \text{ et } \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \\ &= \cosh(\alpha) - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n) \\ &\quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n + 2} - \left(\frac{2n + 1}{2n + 2} \right) I_n.$$

Correction. D'après Q9, on a montré que

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n)$$

donc

$$(2n+2)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)I_n$$

donc

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction. Par passage à la limite dans la dernière relation obtenue, on a

$$\ell = 0 - 1 \times \ell$$

et donc $2\ell = 0$, d'où $\ell = 0$.

Conclusion : $\lim I_n = 0$.

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α , solution de l'équation $\sinh(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a < \varepsilon$.

```
from math import sinh

def dichotomie(eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>=eps :
        c=float(a+b)/2
        if (sinh(c)-1)<0 :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I = \int_1^e \ln(x) \, dx.$$

Correction. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$. On a

$$\begin{aligned} I &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\ &= e \ln(e) - 0 - (e - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion : $I = 1$.

17. En posant $x = \sqrt{t}$, déterminer

$$J = \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Correction. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et en particulier sur $[1, e^2]$. On a, par changement de variables,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{e^2} 2 \ln(t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt \\ &= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{e^2}} 2 \ln(x^2) \, dx \\ &= \int_1^e 4 \ln(x) \, dx \\ &= 4I \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion $J = 4$.

Partie B

18. En posant $x = 1 + e^t$, déterminer

$$K = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} \, dt.$$

Correction. La fonction $t \mapsto 1 + e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et par changement de variables, on a

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{e^t}{(1 + e^t)e^t(1 + e^{-t})} \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)^2} e^t \, dt \\ &= \int_{1+e^0}^{1+e^1} \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_2^{1+e} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}. \end{aligned}$$

Conclusion : $K = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}$.

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

Correction. $D_f = \mathbb{R}^*$.

20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

Correction. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Comme $\lim_{0^-} f \neq \lim_{0^+} f$, la fonction f n'est pas prolongeable en 0.

21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Correction. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition. D'où f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (par somme).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan'(x) + \left[\frac{1}{x}\right]' \arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

22. En déduire que pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Correction. La fonction f est constante sur $]0, +\infty[$ (car f' est nulle) et pour tout $x > 0$:

$$f(x) = f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : Pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a > 0$. On note

$$I_a = \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt \quad \text{et} \quad J_a = \int_{1/2}^2 \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt.$$

23. Calculer $I_a + J_a$.

Correction.

$$\begin{aligned}
 I_a + J_a &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} + \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt && \text{(par linéarité)} \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \arctan(2) - \arctan(1/2).
 \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a + J_a = \arctan(2) - \arctan(1/2)$.

24. En posant $x = \frac{1}{t}$, montrer que $I_a = J_a$.

Correction. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2; 2]$. Par changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
 I_a &= \int_{1/2}^2 \frac{-t^2}{(1+t^2)(1+t^a)} \times \frac{1}{-t^2} dt \\
 &= - \int_2^{1/2} \frac{(1/x)^2}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} dx \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{x^2 \times x^a \times \left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) x^a \left(1 + \frac{1}{x^a}\right)} dx \\
 &= \int_{1/2}^2 \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)} dx \\
 &= J_a.
 \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a = J_a$.

25. En déduire que $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

Correction. En utilisant les résultats Q23 et Q24, on a

$$\begin{aligned}
 2I_a &= \arctan(2) - \arctan(1/2) \\
 &= \arctan(2) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right) && \text{d'après Q22} \\
 &= 2 \arctan(2) - \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

D'où $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice interdite

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions $\cosh$ et $\sinh$.
2. Montrer que les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.
3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.
4. Tracer les tableaux de variations des fonctions $\cosh$ et $\sinh$. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de $\cosh$ et de $\sinh$ en 0.
5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α .
6. On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

7. En déduire la valeur exacte de α .
8. Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$.
9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^\alpha (\sinh t)^{2n} dt.$$

10. Déterminer I_0 .
11. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n + 1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right) I_n.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α , solution de l'équation $\sinh(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a < \varepsilon$.

```
from math import sinh

def dichotomie(eps):
    a=...
    b=...
    while ..... :
        c=float(a+b)/2
        if ..... :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I = \int_1^e \ln(x) \, dx.$$

17. En posant $x = \sqrt{t}$, déterminer

$$J = \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Partie B

18. En posant $x = 1 + e^t$, déterminer

$$K = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} \, dt.$$

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
 20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?
 21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
 22. En déduire que pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a > 0$. On note

$$I_a = \int_{1/2}^2 \frac{1}{(1 + t^2)(1 + t^a)} \, dt \quad \text{et} \quad J_a = \int_{1/2}^2 \frac{t^a}{(1 + t^2)(1 + t^a)} \, dt.$$

23. Calculer $I_a + J_a$.
 24. En posant $x = \frac{1}{t}$, montrer que $I_a = J_a$.
 25. En déduire que $I_a = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.