

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. (6 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

- Vérifier que $x_0 = -1$ est une racine de $P(x)$.
- En déduire une factorisation de $P(x)$ par division euclidienne.
- Dresser le tableau de signes de $P(x)$.
- Résoudre l'inéquation

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 5}{x - 1} \leq 1 \quad (E_1).$$

Exercice 2. (6 points)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = -2x^2 + x + 3.$$

5. Compléter l'assertion suivante :

x_1 et x_2 sont les du polynôme $P(x)$ si et seulement si

$$x_1 + x_2 = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \dots\dots\dots$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. (E_2)

7. Vérifier le résultat de la question 6.

8. Factoriser le polynôme $P(x)$.

9. Dresser le tableau de signes de $P(x)$.

10. À l'aide d'un changement de variables, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

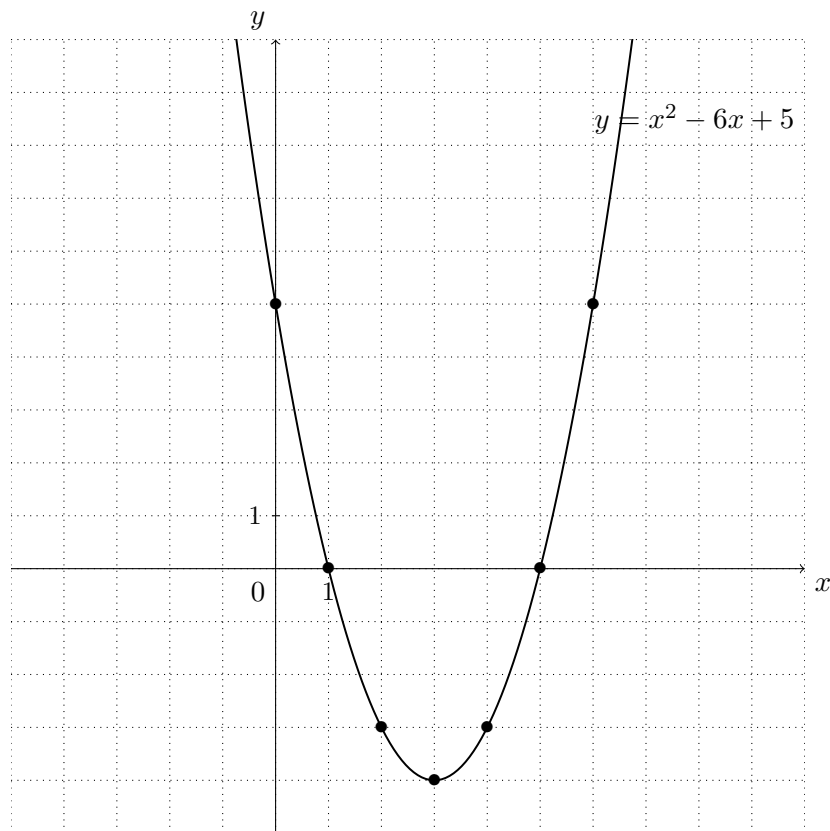
$$-2x^4 + x^2 + 3 = 0. \quad (E_3)$$

11. Déterminer le domaine de validité et résoudre l'inéquation :

$$\ln(x + 2) + \ln(5 - 2x) \leq \ln(7). \quad (E_4)$$

Exercice 3. (6 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = |1 - x| \quad \text{et} \quad g(x) = |x^2 - 6x + 5|.$$



12. Sur le graphique précédent, ajouter le graphe de la fonction $x \mapsto 1 - x$ en **noir**, celui de la fonction f en **bleu** et celui de la fonction g en **rouge**.

13. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = g(x), \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}. \quad (E_5)$$

14. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 4. (2 points) Soit $m \in \mathbb{R}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1).$$

15. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une unique solution ?
Calculer alors cette racine.
16. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?
17. Pour quelle(s) valeur(s) de m a-t-on $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Mathématiques

Durée : 1 heure

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction g , noté D_g .
- Dresser le tableau de signes de $x(x^2 - 1)$ et factoriser $x(x^2 - 1)$.
- Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de D_g et les interpréter graphiquement. On utilisera la question précédente.
- Déterminer a , b et c des réels tels que l'on ait, pour tout $x \in D_g$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

et vérifier le résultat obtenu.

- Déterminer une primitive $G(x)$ de $g(x)$ pour tout $x \in D_g$.

- Simplifier l'expression de $G(x)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

En cas de difficulté, on pourra admettre par la suite que $G(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

- Calculer $G(3) - G(2)$.

On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q des rationnels.

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $F(x) = \frac{-1}{x^2 - 1}$.

- Montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$.

- Rappeler la formule d'intégration par parties.

- En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln(x) \, dx.$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q des rationnels.

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 – Correction

Mathématiques

Exercice 1. Soient $z_1 = 1 + \mathbf{i}$ et $z_2 = \sqrt{6} + \mathbf{i}\sqrt{2}$.

1. Écrire sous forme exponentielle les complexes z_1 et z_2 .

Réponse : $z_1 = \sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. En déduire la forme exponentielle le complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

Réponse : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}$.

3. Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}\right)\mathbf{i}$.

Réponse :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{6} + \mathbf{i}\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \mathbf{i}\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \mathbf{i}\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \mathbf{i}\sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{6} - \mathbf{i}^2\sqrt{2}}{\sqrt{6}^2 + \sqrt{2}^2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Réponse : On a montré que $\frac{1}{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$, donc $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, d'où

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Exercice 2. RÉOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

5. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y - z &= 0 \\ x + 3y &= 3 \\ 3x - 2z &= 4 \end{cases}.$$

Vérifier le résultat obtenu.

Réponse : $\mathcal{S}_1 = \{(0, 1, -2)\}$.

Soit a un réel fixé. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x &-& 2y &+& 3z &= 1 \\ x &+& 3y &-& 2z &= 1 \\ 2x &-& y &+& az &= 2 \end{cases}.$$

6. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.

Réponse : $\det(\mathcal{S}_2) = 5a - 15$.

7. Discuter, suivant la valeur de a , le nombre de solutions du système $\mathcal{S}_2$

Réponse : Lorsque $\det(\mathcal{S}_2) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $a \neq 3$, $\mathcal{S}_2$ admet une unique solution.

Lorsque $a = 3$, $\mathcal{S}_2$ admet une infinité de solutions : $\mathcal{S}_2 = \{(1 - t, t, t), t \in \mathbb{R}\}$ (appliquer l'algorithme de Gauss).

8. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a \neq 3$.

Lorsque $a \neq 3$, l'unique solution de $\mathcal{S}_2$ est $(1, 0, 0)$: $\mathcal{S}_2 = \{(1, 0, 0)\}$.

Exercice 3. Les 4 assertions suivantes sont vraies. Les démontrer.

9. Proposition 1 :

$$(\sqrt{2} + i)^5 = -11\sqrt{2} + i.$$

Réponse :

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + i)^5 &= \sqrt{2}^5 + 5\sqrt{2}^4 i + 10\sqrt{2}^3 i^2 + 10\sqrt{2}^2 i^3 + 5\sqrt{2} i^4 + i^5 \\ &= 4\sqrt{2} + 20i - 20\sqrt{2} - 20i + 5\sqrt{2} + i \\ &= -11\sqrt{2} + i. \end{aligned}$$

10. Proposition 2 : Pour tout nombre réel α ,

$$2ie^{i\alpha} \sin(\alpha) = e^{2i\alpha} - 1.$$

Réponse :

$$\begin{aligned} 2ie^{i\alpha} \sin(\alpha) &= 2ie^{i\alpha} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ &= e^{i\alpha} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \\ &= e^{i2\alpha} - e^{i \times 0} \\ &= e^{i2\alpha} - 1. \end{aligned}$$

11. Proposition 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n (4k+2) = 2(n+1)^2.$$

Réponse :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (4k+2) &= 4 \sum_{k=0}^n k + 2 \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 4 \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) \\ &= 2n(n+1) + 2(n+1) \\ &= 2(n+1)(n+1) \\ &= 2(n+1)^2. \end{aligned}$$

12. Soit ω le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{7}$.

Proposition 4 : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$.

Réponse : On a $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Ainsi $\omega^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = e^{i2\pi} = 1$ et

$$\begin{aligned} 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 &= \sum_{k=0}^6 \omega^k \\ &= \frac{\omega^7 - 1}{\omega - 1} && \text{car } \omega \neq 1 \\ &= 0 && \text{car } \omega^7 = 1. \end{aligned}$$

Exercice 4. Factorisation - Linéarisation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sin(x) + \sin(3x).$$

13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, factoriser $\sin(3x)$.

Réponse :

$$\begin{aligned}
 \sin(3x) &= \operatorname{Im}(e^{i3x}) \\
 &= \operatorname{Im}\left((\cos x + i \sin x)^3\right) \\
 &= \operatorname{Im}\left((\cos x)^3 + 3(\cos x)^2(i \sin x) + 3(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3\right) \\
 &= \operatorname{Im}\left(\cos^3(x) + 3\cos^2(x)\sin(x)i - 3\cos(x)\sin(x) - i\sin^3(x)\right) \\
 &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).
 \end{aligned}$$

14. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = 4 \sin(x) (1 - \sin^2(x)).$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x) + \sin(3x) \\
 &= \sin(x) + 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \\
 &= \sin(x) (1 + 3\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\
 &= \sin(x) (1 + 3(1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x)) \\
 &= \sin(x) (4 - 4\sin^2(x)) \\
 &= 4\sin(x) (1 - \sin^2(x)).
 \end{aligned}$$

15. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, l'équation : $f(x) = 0$.

Réponse :

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff 4\sin(x) (1 - \sin^2(x)) = 0 \\
 &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } 1 - \sin^2(x) = 0 \\
 &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin^2(x) = 1 \\
 &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = -1 \text{ ou } \sin(x) = 1.
 \end{aligned}$$

Les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ sont : $\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = 8\cos^4(x).$$

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
 \cos^4(x) &= \frac{1}{2^4} (e^{ix} + e^{-ix})^4 \\
 &= \frac{1}{16} (e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}) \\
 &= \frac{1}{16} (e^{i4x} + e^{-i4x} + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6) \\
 &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) \\
 &= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

17. En déduire l'expression d'une primitive $G(x)$ de la fonction $g(x)$.

Réponse : On a montré que $g(x) = \cos(4x) + 4\cos(2x) + 3$. Une primitive de $g(x)$ est

$$G(x) = \frac{1}{4}\sin(4x) + 4 \times \frac{1}{2}\sin(2x) + 3x$$

c'est-à-dire

$$G(x) = \frac{1}{4}\sin(4x) + 2\sin(2x) + 3x.$$

Exercice 5. Utilisation de la formule du binôme de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

18. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Rappeler la formule du binôme de Newton permettant de calculer $(a + b)^n$.

Réponse :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

19. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$(e^{i\theta} + 1)^n = S_n + iT_n.$$

Réponse :

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} + 1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) \\ &= S_n + iT_n. \end{aligned}$$

20. Montrer que $(e^{i\theta} + 1)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{in\theta}{2}}$ (sans utiliser le résultat de la question précédente).

Réponse : On sait que $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ (résultat du cours). On a donc

$$(e^{i\theta} + 1)^n = \left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{in\theta}{2}}$$

21. En combinant les résultats des questions précédentes, calculer les sommes S_n et T_n . On attend des expressions factorisées.

Réponse : On a montré que

$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{in\theta}{2}} \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right), \\ T_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right). \end{cases}$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\implies$, $\iff$, $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Soient $z_1 = 1 + \mathbf{i}$ et $z_2 = \sqrt{6} + \mathbf{i}\sqrt{2}$.

1. Écrire sous forme exponentielle les complexes z_1 et z_2 .

2. En déduire la forme exponentielle le complexe $\frac{z_1}{z_2}$.

3. Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} \right) \mathbf{i}$.

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. RÉOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

5. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y - z &= 0 \\ x + 3y &= 3 \\ 3x - 2z &= 4 \end{cases} .$$

Vérifier le résultat obtenu.

Soit a un réel fixé. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 1 \\ 2x - y + az &= 2 \end{cases} .$$

6. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.

7. Discuter, suivant la valeur de a , le nombre de solutions du système $\mathcal{S}_2$

8. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a \neq 3$.

Exercice 3. Les 4 assertions suivantes sont vraies. Les démontrer.

9. Proposition 1 :

$$(\sqrt{2} + \mathbf{i})^5 = -11\sqrt{2} + i.$$

10. Proposition 2 : Pour tout nombre réel α ,

$$2ie^{i\alpha} \sin(\alpha) = e^{2i\alpha} - 1.$$

11. Proposition 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n (4k+2) = 2(n+1)^2.$$

12. Soit ω le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{7}$.

Proposition 4 : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$.

Exercice 4. Factorisation - Linéarisation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sin(x) + \sin(3x).$$

13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, factoriser $\sin(3x)$.

14. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = 4 \sin(x) (1 - \sin^2(x)).$$

15. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, l'équation : $f(x) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = 8 \cos^4(x).$$

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

17. En déduire l'expression d'une primitive $G(x)$ de la fonction $g(x)$.

Exercice 5. Utilisation de la formule du binôme de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

18. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Rappeler la formule du binôme de Newton permettant de calculer $(a+b)^n$.

19. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$(e^{i\theta} + 1)^n = S_n + iT_n.$$

20. Montrer que $(e^{i\theta} + 1)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{in\theta}{2}}$ (sans utiliser le résultat de la question précédente).

21. En combinant les résultats des questions précédentes, calculer les sommes S_n et T_n . On attend des expressions factorisées.

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 – Correction

Mathématiques

Exercice 1. DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A = (-1, 6)$, $B = (4, 1)$ et $C = (7, 2)$ trois points de $\mathcal{P}$.

On note :

- H l'orthocentre du triangle ABC ,
- Ω le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC ,
- G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Calculer l'aire du triangle ABC .

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AC})|}{2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-20 + 40| = 10 \text{ ua.}$$

2. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.

Justifier que $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC .

Un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}_1$ est $(3, 1) = \vec{BC}$. Donc $\mathcal{D}_1$ est perpendiculaire à (BC) . De plus $3x_A + y_A - 3 = 0$, donc $A \in \mathcal{D}_1$. On en déduit que $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC .

3. Déterminer une équation de $\mathcal{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC .

$\mathcal{D}_2$ passe par le point B et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\vec{AC}$.

$$\mathcal{D}_2 : 2x - y - 7 = 0.$$

4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).

$H = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, donc $3x_H + y_H = 3$ et $2x_H - y_H = 7$. On obtient, après résolution du système 2×2 , $x_H = 2$ et $y_H = -3$.

Conclusion : $H(2, -3)$.

5. On note :

I le milieu du segment $[BC]$,

J le milieu du segment $[AC]$,

Placer les points I et J sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).

$$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{11}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Donc } I\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

De même, $J(3, 4)$.

6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.

Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.

Δ_1 admet pour vecteur normal $(3, 1) = \vec{BC}$, donc Δ_1 est perpendiculaire à (BC) . De plus $3x_{A'} + y_{A'} - 18 = 0$, donc I , milieu du segment $[BC]$ appartient à Δ_1 . La droite Δ_1 est donc la médiatrice du segment $[BC]$.

7. Déterminer une équation de Δ_2 , médiatrice du segment $[AC]$.

Δ_2 passe par le point $J(3, 4)$ et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\vec{AC}$:

$$\Delta_2 : 2x - y - 2 = 0.$$

8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).

$\Omega = \Delta_1 \cap \Delta_2$, donc $3x_\Omega + y_\Omega = 18$ et $2x_\Omega - y_\Omega = 2$. On obtient, après résolution du système 2×2 , $x_\Omega = 4$ et $y_\Omega = 6$. Conclusion : $\Omega(4, 6)$.

9. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = \Omega A^2, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{C} : (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25.$$

10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.

$$\text{On sait que } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{10}{3} \text{ et que } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3.$$

11. Montrer que les points H , Ω et G sont alignés.

$$\text{On a } \det(\overrightarrow{H\Omega}, \overrightarrow{HG}) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ donc } \overrightarrow{H\Omega} \text{ et } \overrightarrow{HG} \text{ sont colinéaires et les points } H, \Omega \text{ et } G \text{ sont alignés.}$$

On note :

H' l'image du point H par la symétrie centrale de centre I .

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).

On a, par définition, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IH'}$ donc

$$\begin{cases} x_{H'} - x_I = x_I - x_H \\ y_{H'} - y_I = y_I - y_H \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_{H'} = 2x_I - x_H = 9 \\ y_{H'} = 2y_I - y_H = 6 \end{cases}.$$

Conclusion : $H' (9, 6)$.

13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

$$\text{On a } (x_{H'} - 4)^2 + (y_{H'} - 6)^2 = 25 \text{ donc } H' \in \mathcal{C}.$$

On considère la droite $\mathcal{D}$ du plan

$$\mathcal{D} : 4x + 3y - 9 = 0.$$

14. Quelle est la nature de l'intersection entre le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$?

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{|4x_\Omega + 3y_\Omega - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5 = r \text{ donc } \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \text{ est un point, le projeté orthogonal de } \Omega \text{ sur la droite } \mathcal{D}.$$

15. Préciser $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

On a

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} &\iff \begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25 \\ 4x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x - 4)^2 + (-\frac{4}{3}x - 3)^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{25}{9}x^2 = 0 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{(0, 3)\}$.

Exercice 2. (6 POINTS) UNE ÉTUDE DE FONCTION

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cos(x) - \sin(x) \end{aligned}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

16. Étudier la parité de la fonction f . Que peut-on en déduire concernant son graphe?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x \cos(-x) - \sin(-x) \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) \\ &= -(x \cos(x) - \sin(x)) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

donc f est une fonction impaire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

17. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1 \cos(x) + x \times (-\sin(x)) - \cos(x) = -x \sin(x).$$

On note I_n l'intervalle $[n\pi; (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

18. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I_0 ($n = 0$).

$I_0 = [0, \pi]$			
x	0		π
$f'(x)$	0	—	0
$f(x)$	0	↘	
			$-\pi$

19. Préciser, en fonction de la parité de n , les variations de f sur l'intervalle I_n .

Si n est pair, alors f' est négative sur I_n et f est décroissante sur I_n .

Si n est impair, alors f' est positive sur I_n et f est croissante sur I_n .

20. Montrer que les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.

On a

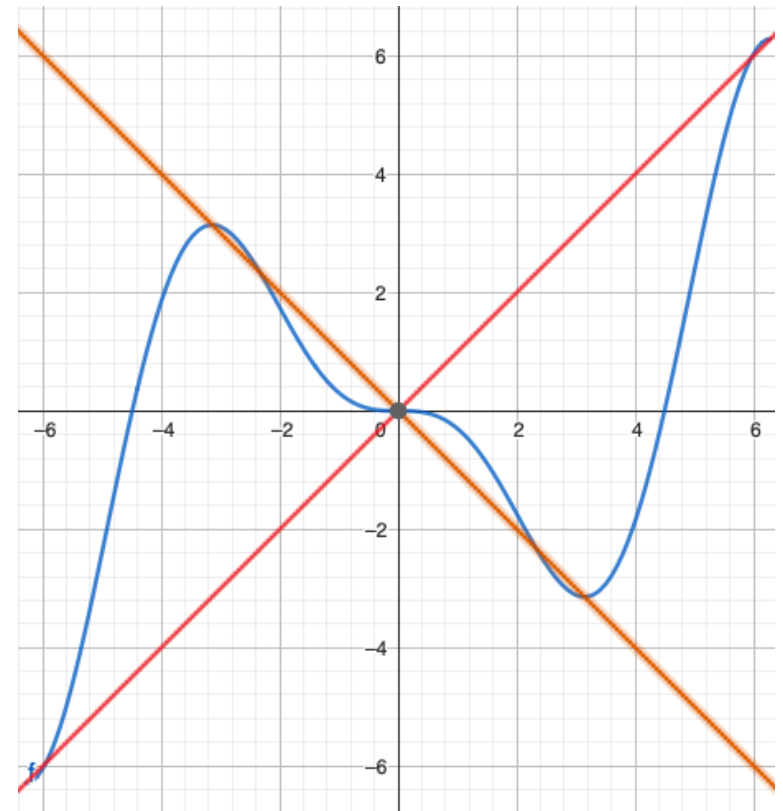
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -x \sin(x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \sin(x) = 0 \\ &\iff x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lorsque k est pair, $f(k\pi) = k\pi$ et lorsque k est impair, $f(k\pi) = -k\pi$.

Les points de la courbe tels que $f'(x) = 0$ sont situés soit sur la droite d'équation $y = x$ (k pair) soit sur la droite $y = -x$ (k impair).

21. Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ (unité graphique : 1 cm).

On représentera les points évoqués à la question précédente, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.



Exercice 3. (2 POINTS) PARITÉ D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right).$$

22. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} > |x| \geq -x$ donc

$$\sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

23. Montrer que f est une fonction impaire.

Montrons que $f(-x) + f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \ln \left(\sqrt{(-x)^2 + 1} - x \right) + \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \\ &= \ln \left(\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \right) \\ &= \ln \left(\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2 \right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ et la fonction f est impaire.

DEVOIR SURVEILLÉ N°4 – Mathématiques – Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Exercice 1. (12 POINTS) DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A(-1, 6)$, $B(4, 1)$ et $C(7, 2)$ trois points de $\mathcal{P}$.

On note :

- H l'orthocentre du triangle ABC ,
- Ω le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC ,
- G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Calculer l'aire du triangle ABC .
2. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.
Justifier que $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC .
3. Déterminer une équation de $\mathcal{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC .
4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
5. On note :

- I le milieu du segment $[BC]$,
- J le milieu du segment $[AC]$,

Placer les points I et J sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul)

6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.
Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.
7. Déterminer une équation de Δ_2 , médiatrice du segment $[AC]$.
8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
9. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.
11. Montrer que les points H , Ω et G sont alignés.

On note :

H' l'image du point H par la symétrie centrale de centre I .

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).
13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ du plan

$$\mathcal{D} : 4x + 3y - 9 = 0.$$

14. Quelle est la nature de l'intersection entre le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$?

15. Préciser $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Exercice 2. (6 POINTS) UNE ÉTUDE DE FONCTION

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cos(x) - \sin(x) \end{aligned}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

16. Étudier la parité de la fonction f . Que peut-on en déduire concernant son graphe ?

17. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On note I_n l'intervalle $[n\pi; (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

18. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I_0 ($n = 0$).

19. Préciser, en fonction de la parité de n , les variations de f sur l'intervalle I_n .

20. Montrer que les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.

21. Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ (unité graphique : 1 cm).

On représentera les points évoqués à la question précédente, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Exercice 3. (2 POINTS) PARITÉ D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right).$$

22. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

23. Montrer que f est une fonction impaire.

DEVOIR SURVEILLÉ N°5 – Correction

Exercice 1. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère trois points :

$$A(1, 2, -1) \quad B(-3, -2, 3) \quad \text{et} \quad C(0, -2, -3).$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$, donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $\vec{n}_{(ABC)}$ le vecteur de coordonnées $(2, -1, 1)$. Il s'agit d'un vecteur normal au plan (ABC) .

3. Déterminer une représentation cartésienne du plan (ABC) .

$$(ABC) : 2x - y + z + 1 = 0.$$

Soit P le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

4. Les plans P et (ABC) sont-ils perpendiculaires ? Justifier.

$\vec{n}_P(1, 1, -1)$ est un vecteur normal au plan P .

Comme $\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{n}_P = 0$, les vecteurs $\vec{n}_{(ABC)}$ et $\vec{n}_P$ sont orthogonaux. Les plans P et (ABC) sont donc perpendiculaires.

Soit G le point de l'espace vérifiant

$$\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}.$$

5. Montrer que quel que soit le point M de l'espace, on a

$$\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MG}.$$

$\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ donc $\vec{GM} + \vec{MA} - (\vec{GM} + \vec{MB}) + 2(\vec{GM} + \vec{MC}) = \vec{0}$, donc $\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = -2\vec{GM}$. D'où le résultat annoncé.

En particulier $\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB} + \vec{OC}$.

6. En déduire que les coordonnées de G sont $(2, 0, -5)$.

$$\text{Comme } \vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB} + \vec{OC},$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{2}x_A - \frac{1}{2}x_B + x_C = 2 \\ y_G = \frac{1}{2}y_A - \frac{1}{2}y_B + y_C = 0 \\ z_G = \frac{1}{2}z_A - \frac{1}{2}z_B + z_C = -5 \end{cases}.$$

7. Déterminer la distance du point C au plan P .

$$d(C, P) = \frac{|x_C + y_C - z_C + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

8. Montrer que la droite (CG) est orthogonale au plan P .

$\overrightarrow{CG}$ pour coordonnées $(2, 2, -2)$. On a $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{n}_P$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est orthogonal au plan P .

Conclusion : La droite (CG) est orthogonale au plan P .

9. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG) .

$$(CG) : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On note H le projeté orthogonal du point C sur le plan P .

10. Déterminer les coordonnées du point H .

$$H \in (CG) \text{ donc } \begin{cases} x_H = 0 + t \\ y_H = -2 + t \\ z_H = -3 - t \end{cases} \text{ avec } t \text{ à déterminer. De plus } H \in P$$

donc $x_H + y_H - z_H + 2 = 0$, donc $t = -1$.

Conclusion : Les coordonnées de H sont $(-1, -3, -2)$.

11. Retrouver le résultat de la question 7.

$$d(C, P) = HC = \left\| \overrightarrow{HC} \right\| = \sqrt{3}.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 12.$$

12. Montrer que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre G et de rayon 6.

$$M \in \mathcal{S} \iff \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 12$$

$$\iff \left\| 2\overrightarrow{MG} \right\| = 12$$

$$\iff 2MG = 12$$

$$\iff MG = 6$$

$$\iff M \text{ appartient à la sphère de centre } G \text{ et de rayon } 6.$$

13. Déterminer l'équation de $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} : (x - 2)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 6^2.$$

14. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan P et de la sphère $\mathcal{S}$.

$$d(G, P) = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} < 6 \text{ donc } \mathcal{S} \cap P \text{ est un cercle.}$$

$\mathcal{S} \cap P$ est le cercle de centre H et de rayon $3 \left(\sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3 \right)$ inclus dans le plan P .

Exercice 2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

15. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' - y = xe^x \quad (E).$$

$$\mathcal{S}_E = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^x, \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

16. Déterminer l'unique solution de (E) qui s'annule en 1.

L'unique solution de (E) qui s'annule en 1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{x^2 - 1}{2}e^x$.

Partie B

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' + y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

17. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) .

(On pourra essayer de chercher une solution « évidente » en observant attentivement l'équation, sans forcément chercher à utiliser la « méthode de variation de la constante ».)

$$y_P(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) : y'' + 5y' + 6y = \frac{x-2}{x^3e^{2x}} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

18. Résoudre l'équation homogène (H_2) associée à l'équation (E_2) .

$$\mathcal{S}_{(H_2)} = \left\{ \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-3x} \end{array} \right., \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \Bigg\}.$$

Soit φ une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivable. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\psi(x) = \varphi(x)e^{2x}.$$

19. Montrer que φ est solution de (E_2) si et seulement si ψ' est solution de (E_1) .

$$\text{Pour tout } x \in]0, +\infty[, \quad \psi'(x) = [\varphi'(x) + 2\varphi(x)]e^{2x} \quad \text{et} \quad \psi''(x) =$$

$$[\varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x)]e^{2x}.$$

ψ' est solution de (E_1)

$$\iff [\psi'(x)]' + \psi'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\iff [\varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x)]e^{2x} + [\varphi'(x) + 2\varphi(x)]e^{2x} = \frac{x-2}{x^3} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\iff \varphi''(x) + 5\varphi'(x) + 6\varphi(x) = \frac{x-2}{x^3e^{2x}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\iff \varphi \text{ est solution de } (E_2).$$

20. En déduire une solution particulière de (E_2) .

On cherche une fonction $\psi(x)$ telle que $\psi'(x)$ soit solution de (E_1) . Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ conviendrait. On pose $\psi(x) = -\frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. D'après la question précédente, si $\psi'(x)$ est solution de (E_1) , alors $\varphi(x) = \psi(x)e^{-2x}$ est une solution de (E_2) . Ainsi $x \mapsto -\frac{1}{x}e^{-2x}$ est une solution particulière de (E_2) .

21. Résoudre complètement l'équation (E_2) .

$$\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-3x} - \frac{1}{x}e^{-2x} \end{array} \right., \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \Bigg\}.$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°5 – Mathématiques – Durée : 2 heures

CALCULATRICE AUTORISÉE

Exercice 1. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère trois points :

$$A(1, 2, -1) \quad B(-3, -2, 3) \quad \text{et} \quad C(0, -2, -3).$$

1. Les points A , B et C définissent-ils un plan ?
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .
3. Déterminer une représentation cartésienne du plan (ABC) .

Soit P le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

4. Les plans P et (ABC) sont-ils perpendiculaires ? Justifier.

Soit G le point de l'espace vérifiant

$$\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}.$$

5. Montrer que quel que soit le point M de l'espace, on a

$$\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MG}.$$

En particulier $\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB} + \vec{OC}$.

6. En déduire que les coordonnées de G sont $(2, 0, -5)$.

7. Déterminer la distance du point C au plan P .
8. Montrer que la droite (CG) est orthogonale au plan P .
9. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG) .

On note H le projeté orthogonal du point C sur le plan P .

10. Déterminer les coordonnées du point H .
11. Retrouver le résultat de la question 7.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12.$$

12. Montrer que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre G et de rayon 6.
13. Déterminer l'équation de $\mathcal{S}$.
14. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan P et de la sphère $\mathcal{S}$.

Exercice 2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

15. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' - y = xe^x \quad (E).$$

16. Déterminer l'unique solution de (E) qui s'annule en 1.

Partie B

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' + y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

17. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) .

(On pourra essayer de chercher une solution « évidente » en observant attentivement l'équation, sans forcément chercher à utiliser la méthode de variation de la constante.)

On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) : y'' + 5y' + 6y = \frac{x-2}{x^3 e^{2x}} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

18. Résoudre l'équation homogène (H_2) associée à l'équation (E_2) .

Soit φ une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivable. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\psi(x) = \varphi(x)e^{2x}.$$

19. Montrer que φ est solution de (E_2) si et seulement si ψ' est solution de (E_1) .

20. En déduire une solution particulière de (E_2) .

21. Résoudre l'équation (E_2) .

DEVOIR SURVEILLÉ N°6 – Mathématiques – Durée : 1 heure

CALCULATRICE AUTORISÉE

Exercice 1. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère trois points :

$$A(2, 1, 1) \quad B(0, -1, 1) \quad \text{et} \quad C(3, 2, 2).$$

1. Les points A , B et C définissent-ils un plan ?
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) .
3. Déterminer une représentation cartésienne du plan (ABC) .

Soient P le plan d'équation $x - y - 1 = 0$ et $D\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$ un point.

4. Déterminer la distance du point D au plan P .

On note Δ la droite passant par D et perpendiculaire à P .

5. Déterminer un vecteur directeur de Δ .
6. Déterminer une représentation paramétrique de Δ .
7. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de D sur le plan P .
8. Retrouver le résultat de la question 4.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble d'équation cartésienne

$$\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = \frac{11}{4}.$$

9. Préciser la nature géométrique de $\mathcal{A}$.

10. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection entre $\mathcal{A}$ et le plan P .

Exercice 2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' + y = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

11. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) .
(On pourra essayer de chercher une solution « évidente » en observant attentivement l'équation)
12. Résoudre (E_1) .

On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) : (1 + e^x) y'' + (1 + 3e^x) y' + 2e^x y = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Soit φ une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivable. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\psi(x) = (1 + e^x) \varphi(x).$$

13. Déterminer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
14. Montrer que φ est solution de (E_2) si et seulement si ψ' est solution de (E_1) .
15. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) .

DEVOIR SURVEILLÉ N°7 – Mathématiques

Correction

Exercice 1. SUITES RÉCURRENTES ET FONCTIONS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}.$$

On définit $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $\mathcal{C}_f$ son graphe.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0, 1]$,

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ainsi pour $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. En utilisant $\mathcal{C}_f$ et la première bissectrice, placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. On laissera apparaître les traits de construction.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On procède par récurrence. On a bien $0 \leq u_0 \leq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sup-

pose que $u_n \in [0, 1]$, alors $f(u_n) \in [0, 1]$ d'après la question précédente, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0, 1]$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{u_n + 3} - u_n \\ &= -\frac{u_n^2 + u_n}{u_n + 3} \\ &= -\frac{u_n(u_n + 1)}{u_n + 3} \leq 0, \end{aligned}$$

car $u_n \in [0, 1]$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

6. Que peut-on en déduire? Déterminer $\lim u_n$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}$. On obtient par passage

à la limite, $\ell = \frac{2\ell}{\ell + 3}$, donc $\ell^2 + 3\ell = 2\ell$ donc $\ell(\ell + 1) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = -1$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, donc $\ell = 0$

Conclusion : $\lim u_n = \ell = 0$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

7. Calculer v_0 et v_1 .
 $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{1}{3}$.

8. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n}{u_n + 3}}{\frac{2u_n}{u_n + 3} + 1} = \frac{2u_n}{3u_n + 3} = \frac{2}{3} \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2}{3} v_n.$$

Conclusion : La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

9. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}$, donc $v_n u_n - u_n = -v_n$, donc $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

10. Retrouver le résultat de la question 6.

$$\lim \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1, \text{ d'où } \lim u_n = \frac{0}{1 - 0} = 0.$$

Exercice 2. MATRICES ET SUITES

Partie A : Calcul des puissances d'une matrice

On considère les matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Calculer P^3 . En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .

$P^3 = I$ donc $P \times P^2 = I$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = P^2$.

12. Vérifier que $AP = PL$. On détaillera les calculs.

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } PL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ donc } AP = PL.$$

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PL^n P^{-1}$.

On procède par récurrence. On pose $H_n : \ll A^n = PL^n P^{-1} \gg$.

$AP = PL$ donc $A = PLP^{-1}$ et H_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(PL^n P^{-1}) = (AP)L^n P^{-1} = (PL)L^n P^{-1} = PL^{n+1} P^{-1} \text{ d'après } Q12 \text{ et } H_n,$$

donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PL^n P^{-1}$.

14. On pose $J = L - I$. Calculer J^3 .

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^3 = J^2 \times J =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc pour tout entier } n \geq 3, J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. En déduire, à l'aide de la formule du binome de Newton que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

On a

$$\begin{aligned} L^n &= (J + I)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k} && \text{car } J \times I = I \times J \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 && \text{si } n \geq 2 \\ &\text{car } J^k = 0_3 \text{ lorsque } k \geq 2 \end{aligned}$$

Ainsi $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$ pour tout entier $n \geq 2$.

16. Expliciter les neuf coefficients de la matrice L^n pour $n \geq 2$. Vérifier que cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

Ainsi pour $n \geq 2$,

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette expression est encore vérifiée en $n = 0$, puisque $L^0 = I$, et en

$$n = 1 \text{ car } L^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= PL^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie B :   tude de suites imbriqu  es

On considère les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définie par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}.$$

18. Que dire de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) est la suite constante égale à 1.

19. Compléter le programme Python qui permet d'afficher la valeur de v_n et w_n pour la valeur n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input("Entrez une valeur de n : "))
u= 1
v= 0
w= 2
for k in range(0,n,1) :
    v=v+2*w
    w=2*u+w
print("v_n vaut "+str(v))
print("w_n vaut "+str(w))
```

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

21. En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

22. Déterminer l'expression des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) + 4n \\ 2n + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n+1) \\ 2(n+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, $v_n = 2n(n+1)$ et $w_n = 2(n+1)$.

Exercice. LES SUITES DU SUJET 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0$.
3. Soit $x \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq 1 &\implies -\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \\
 &\implies 0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \\
 &\implies \frac{3}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1 \\
 &\implies \sqrt{\frac{3}{4}} \leq f(x) \leq \sqrt{1} \quad \text{par croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\
 &\implies 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq f(x) \leq 1.
 \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

4. On procède par récurrence. On pose $\mathcal{H}_n : u_n \in [0, 1]$
 Initialisation : $u_0 \in]0, 1[$ par définition donc $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée : $u_n \in [0, 1]$
 On a par définition $u_{n+1} = f(u_n)$, or $u_n \in [0, 1]$, donc $f(u_n) \in [0, 1]$
 d'après le résultat de la question, donc $u_{n+1} \in [0, 1]$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
 Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
5. La fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 1). La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
 On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

en tant que composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

6. Soit $x \in [0, 1]$. Montrons par équivalence le résultat souhaité.

$$\begin{aligned}
 f(x) \geq x &\iff \sqrt{x^2 - x + 1} \geq x \\
 &\iff x^2 - x + 1 \geq x^2 \quad \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\
 &\iff 1 \geq x
 \end{aligned}$$

or $1 \geq x$ car $x \in [0, 1]$ et donc

$$f(x) \geq x \quad \forall x \in [0, 1].$$

7. $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$ sur $[0, 1]$. On en déduit que f est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Tableau à compléter avec les valeurs $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(1) = 1$.

8. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| = \frac{|2x - 1|}{2f(x)}$, or, d'après Q7,

$$\frac{1}{2f(x)} \leq \frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad |2x - 1| \leq 1$$

On en déduit par produit, que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. On pose $\mathcal{H}_n : |1 - u_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1 - u_0|$.
 $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$. On a admis que

$$\begin{aligned} |1 - u_{n+1}| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n |1 - u_0| && \text{d'après } \mathcal{H}_n \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} |1 - u_0|. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n |1 - u_0|$.

10. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n (1 - u_0)$, et donc

$$1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n (1 - u_0) \leq u_n \leq 1.$$

On conclut, par encadrement que la suite (u_n) converge et que $\lim u_n = 1$.

11. La suite (u_n) est croissante. En effet, en combinant les résultats des questions 4 et 7, on a $f(u_n) \geq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, la suite (u_n) est majorée par 1. On peut donc conclure que la suite (u_n) est convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note alors ℓ sa limite.

Par passage à la limite, on a $\ell = \sqrt{\ell^2 - \ell + 1}$, donc $\ell^2 = \ell^2 - \ell + 1$, donc $\ell = 1$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°7 – Mathématiques

Calculatrice interdite – Durée : 2 heures

Exercice 1. SUITE RÉCURRENTÉ ET FONCTION

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}.$$

On définit $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $\mathcal{C}_f$ son graphe.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
3. En utilisant $\mathcal{C}_f$ et la première bissectrice, placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. On laissera apparaître les traits de construction.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

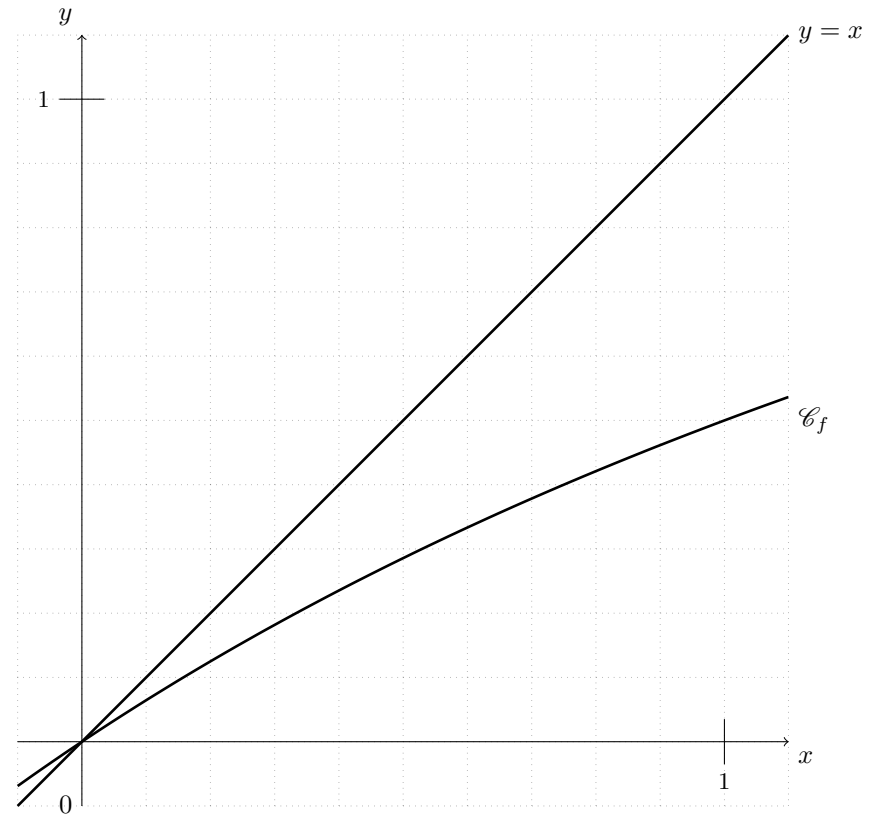
On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

7. Calculer v_0 et v_1 .
8. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Retrouver le résultat de la question 6.



NOM :
Prénom :

Exercice 2. MATRICES ET SUITES

Partie A : Calcul des puissances d'une matrice

On considère les matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Calculer P^3 . En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .

12. Vérifier que $AP = PL$. On détaillera les calculs.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PL^n P^{-1}$.

14. On pose $J = L - I$. Calculer J^3 .

15. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

16. Expliciter les neuf coefficients de la matrice L^n pour $n \geq 2$. Vérifier que cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

17. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie B : Étude de suites imbriquées

On considère les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définie par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}.$$

18. Que dire de la suite (u_n) ?

19. Compléter le programme Python qui permet d'afficher la valeur de v_n et w_n pour la valeur n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input("Entrez une valeur de n : "))
u=...
v=...
w=...
for ..... :
    v=...
    w=...
print("v_n vaut ....")
print("w_n vaut ....")
```

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

21. En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .

22. Déterminer l'expression des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 – Mathématiques – Correction

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient

$$A(X) = X^4 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 - 2X + 2.$$

- Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$. On note $Q(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste de cette division euclidienne.
- Quelle relation lie les polynômes $A(X)$, $B(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$?
- Calculer $B(1 + i)$.
- En déduire $A(1 + i)$. On utilisera les résultats des questions précédentes.

Correction.

- $Q(X) = X^2 + 4X + 6$ et $R(X) = 5X - 11$
- $A = B \times Q + R$
- $B(1 + i) = 0$
- $A(1 + i) = B(1 + i) \times Q(1 + i) + R(1 + i) = R(1 + i) = 5(1 + i) - 11 = -6 + 5i$.

Exercice 2. MATRICES, POLYNÔMES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverse et puissances de la matrice A

- Calculer A^2 . On détaillera les calculs effectués.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 6 & -5 & -12 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Vérifier que $A^2 = 3A - 2I$.

$$3A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 6 & -3 & -12 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 6 & -5 & -12 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} = A^2.$$

- En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

On a $3A - 2I = A^2$, donc $2I = 3A - A^2$, donc $2I = (3I - A)A$, donc $I = \frac{1}{2}(3I - A)A$. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$ par unicité de l'inverse.

On note $P(X) = X^2 - 3X + 2$.

- Déterminer les racines de P et factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

P admet deux racines simples, 1 et 2, et $P(X) = (X - 1)(X - 2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ et $Q(X)$ son quotient.

- Écrire la relation de division euclidienne liant les polynômes X^n , $P(X)$, $R(X)$ et $Q(X)$.

On a $X^n = P(X) \times Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(P)$.

- Déterminer $R(X)$.

Comme $\deg R < 2$, on a $R(X) = aX + b$.

On a $1^n = P(1)Q(1) + a + b$ et $2^n = P(2)Q(2) + 2a + b$. Ainsi

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases},$$

d'où $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$.

Conclusion : $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

11. En déduire une expression de A^n en fonction de I , de A et de n .

On a $A^n = P(A) \times Q(A) + R(A) = R(A)$ car $P(A) = 0$ d'après Q6.

Ainsi $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$.

12. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

$(2^{-1} - 1)A + (2 - 2^{-1})I = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = \frac{1}{2}(3I - A) = A^{-1}$ d'après Q7.

Cette formule est donc encore valable pour $n = -1$.

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$\text{On note } E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

13. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

et résoudre ce système.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ Ainsi}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

14. En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ donc } E_2(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.$$

De plus, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(A)$, qui est également

libre (car constituée d'un vecteur non nul). On conclut que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_2(A)$.

On note $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$.

15. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{x} - y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. $E_1(A)$ est donc un sous-espace

vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$, qui est également libre (car constituée de 2 vecteurs non colinéaires).

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(A)$.

On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier que P est inversible.

$\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible.

17. Montrer que $AP = PD$. On détaillera les calculs effectués.

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2-2+2 & 2-1+0 & 4+0-2 \\ 2-2+4 & 2-1+0 & 4+0-4 \\ -1+2-3 & -1+1+0 & -2+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad PD = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0 & 0+1+0 & 0+0+2 \\ 4+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -2+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{D'où } AP = PD. \end{aligned}$$

18. En déduire une expression de A , puis de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n .

$A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note

$$C_A = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

19. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on vérifiera les quatre points de la définition).

— $C_A \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

— $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in C_A$ car $A \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times A$.

— Soient $M, N \in C_A$. On a

$$A(M + N) = AM + AN = MA + NA = (M + N)A,$$

donc $M + N \in C_A$.

— Soient $M \in C_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A,$$

donc $\lambda M \in C_A$.

Conclusion : C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$M(a, b) = aI + bA = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

et

$$D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P.$$

20. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que la matrice $D(a, b)$ est une matrice diagonale. On explicitera ses coefficients.

On a

$$\begin{aligned} D(a, b) &= P^{-1}M(a, b)P \\ &= P^{-1}(aI + bA)P \\ &= aP^{-1}IP + bP^{-1}AP \\ &= aI + bD \\ &= \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On note

$$F = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = I \}.$$

21. L'espace F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Non, car $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \notin F$.

22. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$M(a, b)^2 = I \iff D(a, b)^2 = I.$$

$$\begin{aligned} D(a, b)^2 = I &\iff (P^{-1}M(a, b)P)^2 = I \\ &\iff P^{-1}M(a, b)PP^{-1}M(a, b)P = I \\ &\iff P^{-1}M(a, b)^2P = I \\ &\iff M(a, b)^2 = PIP^{-1} \\ &\iff M(a, b)^2 = I \end{aligned}$$

23. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que

$$M(a,b)^2 = I.$$

$$M(a,b)^2 = I \iff D(a,b)^2 = I$$

$$\iff \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = I$$

$$\iff \begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a+b)^2 = 1 \\ b(2a+3b) = 0 \quad L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a = \pm 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = -2/3a \\ a = \pm 3 \end{cases}$$

$$\iff (a,b) = (\pm 1, 0) \text{ ou } (a,b) = (3, -2) \text{ ou } (a,b) = (-3, 2)$$

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 – Mathématiques

Calculatrice autorisée – Durée : 2 heures

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient

$$A(X) = X^4 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 - 2X + 2.$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$. On note $Q(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste de cette division euclidienne.
2. Quelle relation lie les polynômes $A(X)$, $B(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$?
3. Calculer $B(1 + i)$.
4. En déduire $A(1 + i)$. On utilisera les résultats des questions précédentes.

Exercice 2. MATRICES, POLYNÔMES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverse et puissances de la matrice A

5. Calculer A^2 . On détaillera les calculs effectués.
6. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I$.
7. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

On note $P(X) = X^2 - 3X + 2$.

8. Déterminer les racines de P et factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ et $Q(X)$ son quotient.

9. Écrire la relation de division euclidienne liant les polynômes X^n , $P(X)$, $R(X)$ et $Q(X)$.
10. Déterminer $R(X)$.
11. En déduire une expression de A^n en fonction de I , de A et de n .
12. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$\text{On note } E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

13. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

et résoudre ce système.

14. En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

On note $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$.

15. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier que P est inversible.

17. Montrer que $AP = PD$. On détaillera les calculs effectués.

18. En déduire une expression de A , puis de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n .

Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note

$$C_A = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}.$$

19. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on vérifiera les quatre points de la définition).

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$M(a, b) = aI + bA = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

et

$$D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P.$$

20. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que la matrice $D(a, b)$ est une matrice diagonale. On explicitera ses coefficients.

On note

$$F = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = I \}.$$

21. L'espace F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

22. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$M(a, b)^2 = I \iff D(a, b)^2 = I.$$

23. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M(a, b)^2 = I$.

CONCOURS BLANC DE MATHÉMATIQUES

Éléments de correction

Problème 1 : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une première méthode pour le calcul des puissances de M

1. On note J la matrice qui vérifie : $M = 4J - 3I_3$. Calculer J .

Correction. $J = \frac{1}{4}(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Calculer J^2 , puis J^n pour tout entier naturel non nul n .

Correction. $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = J$.

3. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Correction. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J.$$

Correction. $M = 4J - 3I_3$. Comme $4J \times (-3I_3) = -12J = (-3I_3) \times 4J$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M^n &= (4J - 3I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} (4J)^0 (-3I_3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I_3 \quad \# \ n \geq 1 \\ &= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J \quad \# \ Q2 \end{aligned}$$

5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) = 1 - (-3)^n.$$

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - \binom{n}{0} 4^0 (-3)^n \\ &= (4-3)^n - (-3)^n \\ &= 1 - (-3)^n.\end{aligned}$$

6. En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J . L'expression obtenue est-elle encore valable lorsque $n = 0$?

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}M^n &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J && \# Q4 \\ &= (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J && \# Q5\end{aligned}$$

De plus, $(-3)^0 I_3 + (1 - (-3)^0) J = I_3 = M^0$. L'expression obtenue est encore vérifiée lorsque $n = 0$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout n entier naturel.

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Une seconde méthode de calcul des puissances de M

8. Montrer que $M^2 = 3I_3 - 2M$.

Correction. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ et $3I_3 - 2M =$

$$\begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \text{ et donc } M^2 = 3I_3 - 2M.$$

9. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 3$. Factoriser $P(X)$.

Correction. $P(X) = (X - 1)(X + 3)$.

10. On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ et $Q(X)$ son quotient. Rappeler la relation de division euclidienne dans ce cas.

Correction. On a $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg P$.

11. Déterminer $R(X)$.

Correction. Comme $\deg R < \deg P$, $R(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. On a

$$\begin{cases} 1^n = P(1)Q(1) + R(1) \\ (-3)^n = P(-3)Q(-3) + R(-3) \end{cases} \quad \text{et donc}$$

$$\begin{cases} R(1) = 1 \\ R(-3) = (-3)^n \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ -3a + b = (-3)^n \end{cases}. \quad \text{Après résolution du}$$

système, on obtient $a = \frac{1 - (-3)^n}{4}$ et $b = \frac{3 + (-3)^n}{4}$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{R(X) = \frac{1 - (-3)^n}{4} X + \frac{3 + (-3)^n}{4}}.$$

12. En déduire une expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction. On a $M^n = P(M)Q(M) + R(M)$ or $P(M) = 0$ d'après Q8. On a

$$\text{donc } M^n = R(M) = \frac{1 - (-3)^n}{4} M + \frac{3 + (-3)^n}{4} I_3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une dernière méthode de calcul des puissances de M

On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice M :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M.$$

$$\text{On pose } \chi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda + 7 & 0 & 8 \\ -4 & \lambda - 1 & -4 \\ -4 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix}.$$

13. Montrer que $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 3)$.

Correction. Calcul d'un déterminant 3×3 avec la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= (\lambda + 7)(\lambda - 1)(\lambda - 5) + 0 + 0 + 32(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)[(\lambda + 7)(\lambda - 5) + 32] \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 3).\end{aligned}$$

14. Résoudre l'équation $\chi(\lambda) = 0$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction. $\chi(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -3$.

15. On note $F = \text{Ker}(M + 3I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (M + 3I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

Déterminer une base de F , ainsi que la dimension de F .

Correction. $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Une base de F est $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim F = 1$.

16. On note $G = \text{Ker}(M - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

Déterminer une base de G , ainsi que la dimension de G .

Correction. $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Une base de G est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\dim G = 2$.

On pose $\vec{u} = (-2, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

17. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction. $\det(u, v, w) = -1 \neq 0$ donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

18. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer D .

Correction. On a $f(u) = (6, -3, -3) = -3u$, $f(v) = (0, 1, 0) = v$ et $f(w) =$

$(-1, 0, 1) = w$. Ainsi

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .

Correction. On a $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

20. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $M^n = PD^nP^{-1}$.

Correction. On pose $\mathcal{H}_n : M^n = PD^nP^{-1}$.

$\mathcal{H}_1$ est vraie d'après la formule de changement de bases.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie. On a

$$\begin{aligned}M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} && \text{d'après } \mathcal{H}_1 \text{ et } \mathcal{H}_n. \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Cette relation est également vérifiée lorsque $n = 0$.

21. Expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout entier naturel n .

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
M^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \# \text{puissance d'une matrice diagonale} \\
&= \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Algèbre de matrices

On note E l'ensemble des matrices R appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R = \lambda I_3 + \mu M$ avec λ et μ deux réels. On a donc

$$E = \{ \lambda I_3 + \mu M \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

22. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E .

Correction. $E = \text{Vect}(I_3, M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille (I_3, M) est libre et génère $E : (I_3, M)$ est donc une base de E .

23. Montrer que M^2 appartient à E .

Correction. On a $M^2 = 3I_3 - 2M \in \text{Vect}(I_3, M)$ d'après la question 8. Donc $M^2 \in E$.

24. En déduire que le produit de deux éléments de E appartient à E .

Correction. Soit $R_1, R_2 \in E$. On a donc $R_1 = \lambda_1 I_3 + \mu_1 M$ et $R_2 = \lambda_2 I_3 + \mu_2 M$

avec λ_i, μ_i des réels.

$$\begin{aligned}
R_1 \times R_2 &= (\lambda_1 I_3 + \mu_1 M) \times (\lambda_2 I_3 + \mu_2 M) \\
&= \lambda_1 \lambda_2 I_3 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) M + \mu_1 \mu_2 M^2 \\
&= \lambda_1 \lambda_2 I_3 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) M + \mu_1 \mu_2 (3I_3 - 2M) \\
&= (\lambda_1 \lambda_2 + 3\mu_1 \mu_2) I_3 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 - 2\mu_1 \mu_2) M \\
&\in \text{Vect}(I_3, M).
\end{aligned}$$

Donc $R_1 \times R_2 \in E$.

25. Soit R une matrice quelconque de E . Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

Correction. On a $R = \lambda I_3 + \mu M$ avec λ, μ des réels et

$$\begin{aligned}
P^{-1}RP &= P^{-1}(\lambda I_3 + \mu M)P \\
&= \lambda P^{-1}P + \mu P^{-1}MP \\
&= \lambda I_3 + \mu D \\
&= \begin{pmatrix} \lambda - 3\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Problème 2 : Combien d'urnes vides ?

Si l'on dispose de k jetons que l'on place au hasard dans n urnes, combien d'urnes restent vides ? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie 1 est indépendante des suivantes.

1. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de deux urnes a et b. Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne a, et une chance sur deux d'être dans l'urne b. Il en est de même pour chacun des quatre autres jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a.

26. Reconnaître la loi de X .

Correction. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$.

27. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X , l'événement « L'urne a est vide ». Faire de même avec l'événement « L'urne b est vide ».

Correction. « L'urne a est vide » = $(X = 0)$ et « L'urne b est vide » = $(X = 5)$.

28. En déduire la probabilité de l'événement « L'une des deux urnes est vide ».

Correction.

$$\begin{aligned} P(\text{« L'une des deux urnes est vide »}) &= P((X = 0) \sqcup (X = 5)) \\ &= P(X = 0) + P(X = 5) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4}. \end{aligned}$$

On aborde maintenant le cas central de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de trois urnes appelées a, b et c. De même que précédemment chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et

sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a, une chance sur trois d'être dans l'urne b, et une chance sur trois d'être dans l'urne c.

2. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

29. Soit E_i l'événement « le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'événement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de l'événement E_i .

Correction. $P(\overline{E_i}) = \frac{1}{3}$ et $P(E_i) = \frac{2}{3}$.

30. Soit V_a l'événement « l'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des événements E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5 .

Correction. $V_a = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5$.

31. En déduire que $P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}$.

Correction. On a

$$\begin{aligned} P(V_a) &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) \\ &= \prod_{i=1}^5 P(E_i) && \text{par indépendance des } (E_i) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^5. \end{aligned}$$

Par symétrie du problème, on pourra admettre que $P(V_b)$ et $P(V_c)$ ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N .

3. Calcul de $P(N = 2)$ et $P(N = 3)$.

32. Que signifie en français l'événement $(N = 3)$? Donner sa probabilité.

On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.

Correction. $(N = 3)$: les 3 urnes sont vides. Donc $P(N = 3) = 0$.

33. Que signifie, en français, l'événement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer alors $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)$.

On admettra que $P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c)$ et $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$ sont aussi égales à cette valeur.

Correction. $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$: « les urnes b et c sont vides » = « l'urne a contient les 5 jetons ». On a donc $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4} \cap \overline{E_5}) = \prod_{i=1}^5 P(\overline{E_i}) = \left(\frac{1}{3}\right)^5$.

34. Calculer la probabilité de l'événement $(N = 2)$. On exprimera dans un premier temps l'événement $(N = 2)$ en fonction d'événements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$, et d'autres du même genre.

Correction. $(N = 2) = (\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) \sqcup (V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c) \sqcup (V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$. On a donc

$$\begin{aligned} P(N = 2) &= P((\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) \sqcup (V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c) \sqcup (V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})) \\ &= P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) + P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c) + P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c}) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^4}. \end{aligned}$$

4. Espérance de N

On va maintenant calculer l'espérance de N

35. On note Z_a la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement V_a est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé, et 0 sinon) et Z_c (qui vaut 1 si l'urne c est vide, et 0 sinon). Reconnaître la loi, et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires Z_a , Z_b et Z_c .

Correction. Z_a suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(V_a) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ et

$E(Z_a) = p = \left(\frac{2}{3}\right)^5$. De même pour Z_b et Z_c .

36. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a , Z_b et Z_c .

Correction. $N = Z_a + Z_b + Z_c$.

37. Calculer alors l'espérance de N .

Correction. $E(N) = E(Z_a + Z_b + Z_c) = E(Z_a) + E(Z_b) + E(Z_c) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^4}$.

5. Loi de N

38. Montrer que $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}$.

Correction. On a $N(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ et $E(N) = \sum_{k=0}^2 kP(N = k) = P(N = 1) + 2P(N = 2)$. Or $E(N) = \frac{2^5}{3^4}$ d'après Q37. D'où l'égalité : $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}$.

39. En déduire la valeur du réel $P(N = 1)$.

Correction. D'après la question précédente, $P(N = 1) = \frac{2^5}{3^4} - 2P(N = 2) = \frac{2^5 - 2}{3^4}$ d'après Q34.

40. Donner enfin la loi de la variable aléatoire N . On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

Correction. On a $P(N = 0) = 1 - P(N = 1) - P(N = 2) = 1 - \frac{2^5 - 2}{3^4} - \frac{1}{3^4} = \frac{3^4 - 2^5 + 1}{3^4}$.

Loi de N :

k	0	1	2
$P(N = k)$	$\frac{3^4 - 2^5 + 1}{3^4}$	$\frac{2^5 - 2}{3^4}$	$\frac{1}{3^4}$

Problème 3 : Étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}.$$

Généralités sur f

41. Déterminer le domaine de définition D de f .

Correction. $D = \mathbb{R}$.

42. f est-elle paire ? f est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 - \cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2 - \cos(x)} = -f(x)$.

Donc f est impaire.

43. f est-elle 2π -périodique ?

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 - \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} = f(x)$. Donc f est 2π -périodique.

44. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier.

Correction. On trace $\mathcal{C}_f$ sur $[0, \pi]$. On complète son graphe en appliquant une symétrie centrale par rapport à l'origine (f est impaire). On a donc un motif sur $[-\pi, \pi]$ (intervalle de longueur 2π) et on complète le graphe en reproduisant ce motif (f est 2π -périodique).

Étude de la fonction f

45. Justifier que f est dérivable sur D . Déterminer l'expression de sa dérivée.

Correction. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto 2 - \cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 2 - \cos(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}.$$

46. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$.

Correction. Sur $[0, \pi]$, $2\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$.

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

$$f'(x) \leq 0 \iff \cos(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right].$$

47. Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$.

Correction. f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. f admet donc un maximum local en $x = \frac{\pi}{3}$ (d'une valeur de $\frac{1}{\sqrt{3}}$). De plus $f(0) = f(\pi) = 0$.

48. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Correction. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ atteint par f en $x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ atteint par f en $x \in \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\max_{\mathbb{R}} |f(x)| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Utilisation d'une primitive de f

49. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Correction. $F(x) = \ln(|2 - \cos(x)|) = \ln(2 - \cos(x))$.

50. En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{2 - \cos(t)} dt.$$

Correction. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{2 - \cos(t)} dt = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \ln\left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$

Soit l'équation différentielle (E)

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}y = 2\sin(x) \quad (E).$$

51. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle homogène associée, que l'on note (H).

Correction. On a

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}y = 0 \quad (H).$$

Ici $a(x) = f(x)$ et $A(x) = F(x) = \ln(2 - \cos(x))$ et $y_H(x) = C \exp(-A(x)) = \frac{C}{2 - \cos(x)}$.

On a $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{2 - \cos(x)} \end{array} , \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$

52. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a(2 - \cos(x)) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Correction. On pose $y_P(x) = a(2 - \cos(x)) + b$, alors $y'_P(x) = a \sin(x)$.

$$\begin{aligned} y'_P(x) + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} y_P(x) &= 2 \sin(x) \iff a \sin(x) + \frac{\sin(x) (a(2 - \cos(x)) + b)}{2 - \cos(x)} = 2 \sin(x) \\ &\iff 2a \sin(x) + \frac{b \sin(x)}{2 - \cos(x)} = 2 \sin(x) \end{aligned}$$

$a = 1$ et $b = 0$ conviennent.

Conclusion : $y_P : x \mapsto 2 - \cos(x)$ est une solution particulière de (E) .

53. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Correction. $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{2 - \cos(x)} + 2 - \cos(x) \end{array} , \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$

54. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

Correction.

$$\begin{aligned} \begin{cases} h \text{ est solution de } (E) \\ h(0) = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} h(x) = \frac{C}{2 - \cos(x)} + 2 - \cos(x) \\ C + 1 = 1 \end{cases} \\ &\iff h(x) = 2 - \cos(x). \end{aligned}$$

CONCOURS BLANC DE MATHÉMATIQUES

Calculatrice interdite – Durée : 4 heures

Problème 1 : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une première méthode pour le calcul des puissances de M

- On note J la matrice qui vérifie : $M = 4J - 3I_3$. Calculer J .
- Calculer J^2 , puis J^n pour tout entier naturel non nul n .
- Énoncer la formule du binôme de Newton.
- Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J.$$

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) = 1 - (-3)^n.$$

- En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J . L'expression obtenue est-elle encore valable lorsque $n = 0$?
- Expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout n entier naturel.

Une seconde méthode de calcul des puissances de M

- Montrer que $M^2 = 3I_3 - 2M$.
- Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 3$. Factoriser $P(X)$.
- On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ et $Q(X)$ son quotient. Rappeler la relation de division euclidienne dans ce cas.
- Déterminer $R(X)$.
- En déduire une expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une dernière méthode de calcul des puissances de M

On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice M :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M.$$

On pose $\chi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda + 7 & 0 & 8 \\ -4 & \lambda - 1 & -4 \\ -4 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$.

13. Montrer que $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 3)$.
14. Résoudre l'équation $\chi(\lambda) = 0$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.
15. On note $F = \text{Ker}(M + 3I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (M + 3I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$
Déterminer une base de F , ainsi que la dimension de F .
16. On note $G = \text{Ker}(M - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (M - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$
Déterminer une base de G , ainsi que la dimension de G .

On pose $\vec{u} = (-2, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

17. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
18. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer D .
19. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} .
20. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $M^n = PD^nP^{-1}$.
21. Expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout entier naturel n .

Algèbre de matrices

On note E l'ensemble des matrices R appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R = \lambda I_3 + \mu M$ avec λ et μ deux réels. On a donc

$$E = \{ \lambda I_3 + \mu M \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

22. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E .
23. Montrer que M^2 appartient à E .
24. En déduire que le produit de deux éléments de E appartient à E .
25. Soit R une matrice quelconque de E . Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

Problème 2 : Combien d'urnes vides ?

Si l'on dispose de k jetons que l'on place au hasard dans n urnes, combien d'urnes restent vides ? Plutôt que de traiter cette question dans un cas général, on s'intéressera ici au cas où l'on dispose de cinq jetons, dans deux situations : configuration à deux urnes (première partie) puis à trois urnes (parties suivantes). La partie 1 est indépendante des suivantes.

1. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

On dispose de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de deux urnes a et b. Chaque jeton est placé dans l'une des deux urnes, aléatoirement et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi le jeton 1 a une chance sur deux d'être dans l'urne a, et une chance sur deux d'être dans l'urne b. Il en est de même pour chacun des quatre autres jetons. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans l'urne a.

26. Reconnaître la loi de X .
27. Exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X , l'événement « L'urne a est vide ». Faire de même avec l'événement « L'urne b est vide ».
28. En déduire la probabilité de l'événement « L'une des deux urnes est vide ».

On aborde maintenant le cas central de l'exercice : on dispose toujours de cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, et de trois urnes appelées a, b et c. De même que précédemment chaque jeton est placé aléatoirement dans l'une des trois urnes, et sans tenir compte du placement effectué pour les autres jetons. Ainsi chaque jeton a une chance sur trois d'être dans l'urne a, une chance sur trois d'être dans l'urne b, et une chance sur trois d'être dans l'urne c.

2. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

29. Soit E_i l'événement « le jeton i n'est pas dans l'urne a ». Donner la probabilité de l'événement contraire $\overline{E_i}$ puis celle de l'événement E_i .
30. Soit V_a l'événement « l'urne a est vide ». Exprimer V_a en fonction des événements E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5 .
31. En déduire que $P(V_a) = \frac{2^5}{3^5}$.

Par symétrie du problème, on pourra admettre que $P(V_b)$ et $P(V_c)$ ont aussi cette même valeur.

On note désormais N la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides. L'objectif est de donner la loi de N .

3. Calcul de $P(N = 2)$ et $P(N = 3)$.

32. Que signifie en français l'événement $(N = 3)$? Donner sa probabilité.
On rappelle que chaque jeton doit être contenu dans une urne.
33. Que signifie, en français, l'événement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$? Calculer alors $P(\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c)$.
On admettra que $P(V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c)$ et $P(V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$ sont aussi égales à cette valeur.
34. Calculer la probabilité de l'événement $(N = 2)$. On exprimera dans un premier temps l'événement $(N = 2)$ en fonction d'événements tels que $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$, et d'autres du même genre.

4. Espérance de N

On va maintenant calculer l'espérance de N

35. On note Z_a la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement V_a est réalisé, et 0 s'il ne l'est pas. On a de même les notations Z_b (Z_b vaut 1 si V_b est réalisé, et 0 sinon) et Z_c (qui vaut 1 si l'urne c est vide, et 0 sinon). Reconnaître la loi, et donner l'espérance de ces trois variables aléatoires Z_a, Z_b et Z_c .

36. On note toujours N le nombre d'urnes vides. Exprimer N en fonction de Z_a, Z_b et Z_c .

37. Calculer alors l'espérance de N .

5. Loi de N

38. Montrer que $P(N = 1) + 2P(N = 2) = \frac{2^5}{3^4}$.
39. En déduire la valeur du réel $P(N = 1)$.
40. Donner enfin la loi de la variable aléatoire N . On répondra sous la forme d'un tableau, aucune justification n'est attendue.

Problème 3 : Étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}.$$

Généralités sur f

41. Déterminer le domaine de définition D de f .
42. f est-elle paire ? f est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.
43. f est-elle 2π -périodique ?
44. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier.

Étude de la fonction f

45. Justifier que f est dérivable sur D . Déterminer l'expression de sa dérivée.
46. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$.
47. Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$.
48. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Utilisation d'une primitive de f

49. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
50. En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{2 - \cos(t)} dt.$$

Soit l'équation différentielle (E)

$$y' + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} y = 2 \sin(x) \quad (E).$$

51. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle homogène associée, que l'on note (H) .
52. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a(2 - \cos(x)) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
53. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
54. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°10 – Mathématiques – Correction

Cours et applications

1. Compléter la formule du changement de variables et rappeler ses hypothèses.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \dots\dots\dots$$

Correction. Soit f est continue sur I . Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que que $a < b$ et $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Alors

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.}$$

2. En posant $x = \sqrt{t}$, calculer

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \, dt.$$

Correction. $t \mapsto \sqrt{t}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et $[1, 4] \subset$

$]0, +\infty[$. De plus, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. D'où

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \, dt &= 2 \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt. \\ &= 2 \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{1}{1+x} \, dx \\ &= 2 [\ln(|1+x|)]_1^2 \\ &= 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

3. En posant $x = t^6$, calculer

$$\int_0^1 \frac{t^5}{1+t^{12}} \, dt.$$

Correction. $t \mapsto t^6$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\frac{dx}{dt} = 6t^5$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^5}{1+t^{12}} \, dt &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{1}{(1+(t^6)^2)} \times 6t^5 \, dt \\ &= \frac{1}{6} \int_{0^6}^{1^6} \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{6} [\arctan(x)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

4. En posant $t = \sqrt{x^2 + 1}$, calculer

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Correction. On pose $x = \sqrt{t^2 - 1}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et $[\sqrt{2}, 2] \subset]1, +\infty[$. De plus $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^2} \times \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= [\arctan(x)]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 1.

On définit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5. Calculer I_0 et I_1 .

Correction. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$.

6. Calculer I_2 .

Correction. On a

$$\begin{aligned} \sin^2(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{i2t} - 2 + e^{-i2t}}{-4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

7. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Correction.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) dt - \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) (\sin(t) - 1) dt \end{aligned}$$

Or $\sin^n(t) (\sin(t) - 1) \leq 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, donc $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t) (\sin(t) - 1) dt \leq \int_0^{\pi/2} 0 dt$ par croissance de l'intégrale. D'où $I_{n+1} - I_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (I_n) est donc décroissante.

8. Montrer que la suite (I_n) est positive.

Correction. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\sin^n(t) \geq 0$. On en déduit que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par positivité de l'intégrale.

9. Que peut-on en déduire ? On ne cherchera pas à déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Correction. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

10. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$

Indication : $\sin^{n+2}(t) = \sin^{n+1}(t) \times \sin(t)$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Correction. Les fonctions $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) \times \sin(t) dt \\
 &= [-\sin^{n+1}(t) \cos(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(t) \times (n+1) \sin^n(t) \times (-\cos(t)) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \cos^2(t) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) (1 - \sin^2(t)) dt \\
 &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t) dt \\
 &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}
 \end{aligned}$$

D'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Correction. On procède par récurrence. On note $\mathcal{H}_p$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$.

I_0 est vraie d'après la question 6.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_p$ vraie et on montre $\mathcal{H}_{p+1}$.

$$\begin{aligned}
 I_{2(p+1)} &= I_{2p+2} \\
 &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} && \text{d'après Q11} \\
 &= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} && \text{d'après } \mathcal{H}_p \\
 &= \frac{2p+2}{2p+2} \times \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2p+2)!}{2^2(p+1)^2 \times 2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

12. Conjecturer, sans la démontrer, l'expression de I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Correction. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x).$$

Étude de la fonction f

13. Dresser le tableau de variations de f .

Correction.

14. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.

Correction. $f :]0, 1[\rightarrow]1, +\infty[$ est continue et strictement décroissante, donc bijective. Comme $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = 2$.

De même, $f :]1, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ est bijective. Comme $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique $b \in]1, +\infty[$ tel que $f(b) = 2$. Enfin $f(1) \neq 0$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet exactement deux solutions, a et b , vérifiant $0 < a < 1 < b$.

15. Montrer que $b \in [2, 4]$.

Indication : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Correction : On a $f(2) = 2 - \ln(2) < 2$ et $f(4) = 4 - \ln(4) = 2(2 - \ln 2) \simeq 2,6 > 2$. Donc $b \in [2, 4]$.

Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction définie par

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

16. Justifier que Φ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Correction. $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car f l'est et f ne s'annule pas sur cet intervalle (cf tableau de variations de f). Lorsque $x \in]0, +\infty[$, l'intervalle $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$. Donc Φ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

17. Justifier que Φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

Correction. Comme $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ et comme $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on en déduit que Φ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On note $\varphi(x)$ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$. Alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\Phi(x) = \phi(2x) - \phi(x)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 2\phi'(2x) - \phi'(x) \\ &= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\ &= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}. \end{aligned}$$

18. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$ (sans préciser les limites en 0 et en $+\infty$ de $\Phi(x)$)

Correction. On constate que pour tout $x > 0$:

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{f(x) \times f(2x)}.$$

Comme f est strictement positive sur $]0, \infty[$, on en déduit que $\Phi'(x)$ a le même signe que $\ln(2) - \ln(x)$. Donc Φ est croissante sur $]0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

19. Justifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$. En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

Correction. $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ d'après Q14. D'où $0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$ sur $]0, +\infty[$. On conclut, par croissance de l'intégrale, que

$$\int_x^{2x} 0 \, dt \leq \Phi(x) \leq \int_x^{2x} 1 \, dt.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

20. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Correction. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$ par encadrement. Ainsi Φ est prolongeable par continuité en 0 et $\Phi(0) = 0$.

21. Justifier que $\Phi'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(2x)}$.

Correction. $\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(2x)}$.

22. En déduire que Φ est dérivable en 0 et déterminer $\Phi'(0)$.

Correction. $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{\ln(2x)} = 0$. Donc Φ est dérivable en 0 et $\Phi'(0) = 0$.

23. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.

DEVOIR SURVEILLÉ N°10 – Mathématiques

Calculatrice interdite – Durée : 2 heures

Cours et applications

1. Compléter la formule du changement de variables et rappeler ses hypothèses.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \dots\dots\dots$$

2. En posant $x = \sqrt{t}$, calculer

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \, dt.$$

3. En posant $x = t^6$, calculer

$$\int_0^1 \frac{t^5}{1+t^{12}} \, dt.$$

4. En posant $t = \sqrt{x^2 + 1}$, calculer

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \, dt.$$

Exercice 1

On définit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \, dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5. Calculer I_0 et I_1 .
6. Calculer I_2 .
7. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
8. Montrer que la suite (I_n) est positive.
9. Que peut-on en déduire ? On ne cherchera pas à déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
10. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$

Indication : $\sin^{n+2}(t) = \sin^{n+1}(t) \times \sin(t)$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Indication : On pourra procéder par récurrence.

12. Conjecturer, sans la démontrer, l'expression de I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x).$$

Étude de la fonction f

13. Dresser le tableau de variations (complet) de f .
14. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
15. Montrer que $b \in [2, 4]$.
Indication : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction définie par

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

16. Justifier que Φ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
17. Justifier que Φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

18. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$ (sans préciser les limites en 0 et en $+\infty$ de $\Phi(x)$).
19. Justifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$.
En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.
20. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

21. Justifier que $\Phi'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(2x)}$.

22. En déduire que Φ est dérivable en 0 et déterminer $\Phi'(0)$.

23. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.