

Feuille d'exercices n°1 - Correction

Équations et inéquations

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. & 2x + 3 = 0 & 2. & 3 - 2x = x - 1 & 3. & \frac{2x - 1}{x + 1} = 1 \\ 4. & \frac{2x + 2}{x + 1} = 1 & 5. & \frac{3x + 2}{6x + 4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Résoudre graphiquement les équations (1) et (2).

$$\begin{array}{lll} 1. & \mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}\right\} & 2. & \mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}\right\} & 3. & \mathcal{S} = \{2\} \\ 4. & \mathcal{S} = \emptyset & 5. & \mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \end{array}$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. & |2x + 1| = 0 & 2. & |x - 2| = 1 \\ 3. & |2x - 3| = |x - 2| & 4. & |x + 1| - |x - 1| = 1 \\ 5. & |x + 1| \cdot |x - 1| = 1 & 6. & \frac{|x + 1|}{|x - 1|} = 1 \end{array}$$

Résoudre graphiquement les équations (2) et (3).

$$\begin{array}{ll} 1. & \mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\} & 2. & \mathcal{S} = \{1; 3\} \\ 3. & \mathcal{S} = \left\{1; \frac{5}{3}\right\} & 4. & \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 5. & \mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\} & 6. & \mathcal{S} = \{0\} \end{array}$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x^2 - 5 = 0 & 2. & 2x^2 + 3 = 0 \\ 3. & x^2 + x + 1 = 0 & 4. & 6x^2 - 5x + 1 = 0 \\ 5. & x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0 & 6. & x^2 - x - 1 = 0 \end{array}$$

Factoriser les expressions lorsque cela est possible.

$$\begin{array}{l} 1. & \mathcal{S} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\} \text{ et } x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}). \\ 2. & \mathcal{S} = \emptyset. \\ 3. & \mathcal{S} = \emptyset. \\ 4. & \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\} \text{ et } 6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right). \\ 5. & \mathcal{S} = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}\} \text{ et } x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}). \\ 6. & \mathcal{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \text{ et } x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{array}$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$1. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -10 \end{cases} \quad 2. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a^2 + 1}{a} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \text{ où } a > 0 \text{ fixé.}$$

$$\begin{array}{l} 1. & \mathcal{S} = \{(5, -2); (-2, 5)\}. \\ 2. & \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{a}; a\right); \left(a; \frac{1}{a}\right)\right\}. \end{array}$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en cherchant au préalable une solution évidente :

$$\begin{array}{l} 1. & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0; \\ 2. & x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0; \\ 3. & 4x^3 - 12x^2 - 11x + 5 = 0; \\ 4. & x^3 + x^2 - x + 2 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1. & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \iff (x - 1)(x^2 - 5x + 5) = 0. \quad \boxed{\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}}. \\ 2. & x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \iff (x + 1)(x^2 - 2) = 0. \quad \boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\}}. \end{array}$$

$$3. \quad 4x^3 - 12x^2 - 11x + 5 = 0 \iff (x+1)(4x^2 - 16x + 5) = 0.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -1, \frac{4 - \sqrt{11}}{2}, \frac{4 + \sqrt{11}}{2} \right\}.$$

$$4. \quad x^3 + x^2 - x + 2 = 0 \iff (x+2)(x^2 - x + 1) = 0. \quad \boxed{\mathcal{S} = \{-2\}}.$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. \quad 3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$2. \quad 3x + 2\sqrt{x} - 5 = 0$$

$$3. \quad \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 5 = 0$$

$$4. \quad \frac{1}{x} + \frac{8}{\sqrt{x}} - 12 = 0$$

$$1. \quad \mathcal{S} = \left\{ -1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 \right\}$$

$$2. \quad \mathcal{S} = \{1\}$$

$$3. \quad \mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{5}; 1 \right\}$$

$$4. \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{11+4\sqrt{7}}{36} \right\}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. \quad \sqrt{4-x} = x-2$$

$$2. \quad \sqrt{2x-6} = x-7$$

$$3. \quad \sqrt{3x+3} = \sqrt{x^2+x}$$

$$4. \quad \sqrt{16-4x} = 3\sqrt{6-x}$$

$$1. \quad \mathcal{S} = \{3\}$$

$$2. \quad \mathcal{S} = \{11\}$$

$$3. \quad \mathcal{S} = \{-1; 3\}$$

$$4. \quad \mathcal{S} = \emptyset$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1. \quad x-1 > 2x-3$$

$$2. \quad |3x+2| \leq 3$$

$$3. \quad |4x-2| > 2$$

$$4. \quad |x-1| < |x+1|$$

$$5. \quad x^2 - x > 0$$

$$6. \quad -2x^2 + x + 1 \leq 0$$

$$7. \quad (x-1)(x+1) < (x+1)^2$$

$$8. \quad x^2 \leq x$$

$$9. \quad (x-2)^2 \leq (x-3)(x-1)$$

$$10. \quad (x-1)^2 < 2(x-3)(x-1)$$

$$11. \quad \left| \frac{x-1}{3x-2} \right| \geq 2$$

$$12. \quad \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$$

$$13. \quad x^3 + 3x^2 - 4 < 0$$

$$14. \quad \sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq \sqrt{2x^2 - x}$$

$$15. \quad \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 3x + 2$$

$$1. \quad \mathcal{S} =]-\infty; 2[$$

$$2. \quad \mathcal{S} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right]$$

$$3. \quad \mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$$

$$4. \quad \mathcal{S} =]0; +\infty[$$

$$5. \quad \mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$$

$$6. \quad \mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$$

$$7. \quad \mathcal{S} =]-1; +\infty[$$

$$8. \quad \mathcal{S} = [0; 1]$$

$$9. \quad \mathcal{S} = \emptyset$$

$$10. \quad \mathcal{S} =]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$$

$$11. \quad \mathcal{S} = \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{7} \right] \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$12. \quad \mathcal{S} =]-1; 0] \cup]1; +\infty[$$

$$13. \quad \mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[$$

$$14. \quad \mathcal{S} =]-\infty; -2-2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}-2; 1] \cup [4; +\infty[$$

$$15. \quad \mathcal{S} = [0; 1] \cup [4; +\infty[$$