Feuille d'exercices n°3
Pratique calculatoire et fonctions

1 Limites

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to+\infty} 5x^3-2x+3$

(2) $\lim_{x\to-\infty} 5x^3-2x+3$

(3) $\lim_{x\to-\infty} -2x^4+x^2+3$

(4) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

(5) $\lim_{x\to1^-} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

(6) $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

(7) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

(8) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

(9) $\lim_{x\to-3} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

(10) $\lim_{x\to(-3)^+} \sqrt{\dfrac{x+4}{x+3}}$

(11) $\lim_{x\to1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x^3+x^2+x}$

(13) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

(14) $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+1}\right)$

(15) $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

(16) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(17) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x$

(18) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-x$

(19) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x$

(20) $\lim_{x\to2} \dfrac{-x^2+3x-2}{x-2}$

(21) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(22) $\lim_{x\to2} \dfrac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to+\infty} x-\mathrm{e}^x$ (2) $\lim_{x\to+\infty} x^2-\ln(x)$ (3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-\mathrm{e}^x}$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$ (5) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\sin(x)}$ (6) $\lim_{x\to-\infty} x^2+x\sin(x)$

2 Dérivées

Exercice 3. Représenter les fonctions suivantes. Sont-elles dérivables en 0 ?

(1) $f(x)=|x|$ (2) $f(x)=|x|^3$ (3) $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition, ainsi que la dérivée des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\frac{x^3-3x^2-1}{6}$ (2) $f(x)=\frac{1-2x}{x-2}$ (3) $f(x)=\ln(1-x^2)$

(4) $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$ (5) $f(x)=\left(x^2-3\right)^2$ (6) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$

(7) $f(x)=\cos(2x)$ (8) $f(x)=\sqrt{4-x}$ (9) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$

(10) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (11) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}$ (12) $f(x)=x\mathrm{e}^{2x+3}$

Exercice 5. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 :

(1) $f(x)=\mathrm{e}^x,\quad x_0=0$ (2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\quad x_0=2$

3 Primitives

Exercice 6. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = 2x^3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^5}$ sur $]0, +\infty[$

(2) $f(x) = 4x\left(2x^2+1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$

(3) $f(x) = (3x-2)^3$ sur $\mathbb{R}$

(4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$

(5) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

(6) $f(x) = \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1, 1[$

(8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}$ sur $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$

(9) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $\mathbb{R}$

(10) $f(x) = \sin(x)\cos^4(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7. Déterminer l'unique primitive de f vérifiant une condition donnée :

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $F(2) = 1$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$, $F(-1) = 0$

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer qu'il existe a, b, c des réels tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}.$$

3. En déduire une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ (3) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_0^1 t\exp\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t$

(7) $\displaystyle\int_0^1 5\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ (9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \,\mathrm{d}x$

Exercice 10. On considère les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer I, puis $I + J$. En déduire J.

Exercice 11.

Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties :

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ (6) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^n \ln x\,\mathrm{d}x$