Feuille d'exercices n°4 - Correction Calcul algébrique

Propriétés de \sum et de \prod

Exercice 1. Soient $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$, $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(z_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ trois familles de nombres complexes, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général?

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
,

(b)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right),$$

(c)
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

(d)
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$$
.

- 2. Reprendre la question précédente en remplaçant tous les \sum par des \prod .
- 3. On suppose que $(a_k)_{1 \le k \le n}$ est une famille de réels tels que $a_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Transformer $\sum_{k=1}^n \ln{(a_k)}$.
- 4. Est-il vrai que $\prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} z_{ij}$?
- 1. (a) vrai

- (b) faux
- (c) vrai
- (d) faux
- 2. (a) faux
 - (b) vrai
 - (c) faux
 - (d) vrai

3.
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$
.

4. faux car
$$\prod_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} 1 \neq \sum_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{2} 1$$
.

Sommes

Exercice 2. 1. Calculer la somme des n premiers entiers impairs.

- 2. Calculer la somme $S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + (n-1) \times n$.
- 3. Calculer la somme $T = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \dots + (n-1) \times 2 + n \times 1$.

1.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n^2$$
.

 2

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1) \times n$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (k-1)k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (k^2 - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

3.
$$T = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \dots + (n-1) \times 2 + n \times 1$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$
$$= (n+1) \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^{2}$$
$$= (n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

1.
$$\sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} 1$$
 2. $\sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} k$

$$2. \sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$3. \sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} n$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$$

5.
$$\sum_{k=1001}^{2016} 3$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$$
 5. $\sum_{k=1001}^{2016} 3$ 6. $\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$

7.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

8.
$$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$$

7.
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$
 8. $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$ 9. $\sum_{k=1}^{n} \left(2^k + k^2 + 2\right)$

10.
$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$$

11.
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$$

11.
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$$
 12. $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

13.
$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)$$
 14. $\sum_{k=0}^{n} (k+1)$ 15. $\sum_{1 \le i < j \le n} (i+j)$

1.
$$\sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{n=1}^{3} n = 1 + 2 + 3 = 6$$

2.
$$\sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} k = 1 + (1+2) + (1+2+3) = 10$$

3.
$$\sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} n = 1 + (2+2) + (3+3+3) = 14$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n$$

5.
$$\sum_{k=1001}^{2016} 3 = 3 \sum_{k=1001}^{2016} 1 = 3 \times (2016 - 1001 + 1) = 3048$$

 $\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ $=6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k - (-1)^0$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{-1 - 1} - 1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

8.

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{n} 9^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 9^{k} - 1$$

$$= \frac{9^{n+1} - 1}{9 - 1} - 1$$

$$= \frac{9}{8} (9^{n} - 1)$$

9.
$$\sum_{k=1}^{n} (2^k + k^2 + 2) = \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$$

10.
$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}} = 3 \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{9}\right)^i$$
$$= 3 \left(\sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{2}{9}\right)^i - 1\right)$$
$$= 3 \left(\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{n+2} - 1}{\left(\frac{2}{9}\right) - 1} - 1\right)$$

11.
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} (i^{2} - i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} i^{2} - \sum_{i=0}^{n} i)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

12.

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k))$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

$$= \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

13.
$$\sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

14.
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) = \sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

15.

$$\begin{split} \sum_{1\leqslant i < j\leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + j \sum_{i=1}^{j-1} 1\right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{(j-1)j}{2} + j(j-1)\right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{3}{2}(j^2 - j)\right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j\right) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{2} \end{split}$$

Exercice 4. 1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

- 2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
- 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{(somme t\'elescopique)}$$

$$= \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1. Simplifier de deux façons différentes la somme $\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 k^2)$ et retrouver ainsi l'expression de $\sum_{k=0}^{n} k$ vue en cours.
- 2. Adapter cette méthode pour retrouver l'expression de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
- 1. On note $S = \sum_{k=0}^{n} k$. D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2) = (n+1)^2 - 0^2 \quad \text{(somme téléscopique)}$$
$$= (n+1)^2.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$
$$= 2S + (n+1).$$

Donc

$$2S + (n+1) = (n+1)^{2}$$

$$\implies 2S = (n+1)^{2} - (n+1)$$

$$\implies 2S = n(n+1)$$

$$\implies S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. On note $S' = \sum_{i=1}^{n} k^2$. D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 \quad \text{(somme téléscopique)}.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$$
$$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$
$$= 3S' + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Donc

$$3S' + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^3$$

$$\implies 6S' = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$

$$\implies 6S' = (n+1)\left(2(n+1)^2 - 3n - 2\right)$$

$$\implies 6S' = (n+1)\left(2n^2 + n\right)$$

$$\implies S' = \frac{(n+1)\left(2n^2 + n\right)}{6}$$

D'où

$$S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Produits

Exercice 6. Démontrer les égalités suivantes :

1.
$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^{n} n!$$

$$2. \prod_{k=1}^{n} 3x^2 = 3^n x^{2n}$$

$$3. \prod_{k=0}^{n} x^k = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

3.
$$\prod_{k=0}^{n} x^k = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$
4.
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$$

5.
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$$

5.
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$$
 6.
$$\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

1.
$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = \prod_{k=1}^{n} 2 \times \prod_{k=1}^{n} k = 2^{n} n!$$

2.
$$\prod_{k=1}^{n} 3x^2 = \prod_{k=1}^{n} 3 \times \prod_{k=1}^{n} x^2 = 3^n \times (x^2)^n = 3^n x^{2n}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & & & \\
 & & & \\
 & & \prod_{k=0}^{n} x^k & = x^0 \times x^1 \times x^2 \times \times \cdots \times x^n \\
3. & & & = x^{0+1+2+\cdots+n} \\
 & & & = x^{\sum_{k=0}^{n} k}
\end{array}$$

4.
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)} = \frac{2n+1}{1} = 2n+1$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n} (k+1) \prod_{k=2}^{n} (k-1)}{\prod_{k=2}^{n} k}$$
$$= \frac{\frac{(n+1)!}{2} \times (n-1)!}{n!}$$

5.
$$= \frac{\frac{(n+1)!}{2} \times (n-1)!}{2}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2} \times \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2n}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) \times \prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)}$$
6.
$$= \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n} 2 \times \prod_{k=1}^{n} k}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{n} n!}$$

Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 7. Montrer sans récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}.$$

Si n = 1, on a bien $2^{n-1} \le n! \le n^{n-1}$.

Si $n \ge 2$, alors pour tout $k \in [2, n]$, on a

$$2 \leqslant k \leqslant n$$
.

Donc

$$\prod_{k=2}^{n} 2 \leqslant \prod_{k=2}^{n} k \leqslant \prod_{k=2}^{n} n,$$

c'est-à-dire

$$2^{n-1} \le n! \le n^{n-1}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}$.

Exercice 8. 1. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$, puis de $(x^2-3)^7$?

- 2. Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$?
- 3. Quel est le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x-y)^{13}$?

1.

$$(x+2)^8 = \sum_{k=0}^8 {8 \choose k} x^k \times 2^{8-k}$$

= \cdots + \binom{6}{8} x^6 \times 2^2 + \cdots

Le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ est $\binom{8}{6} \times 2^2$.

Le coefficient de x^6 dans le développement de $(x^2 - 3)^7$ est $\binom{7}{3}(-3)^4$.

- 2. Le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$ est $\binom{10}{3}(-1)^7$.

Exercice 9. 1.
$$\sum_{k=0}^{n} {n \choose k} 2^k 3^{n-k} = (2+3)^n = \boxed{5^n}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} {n \choose k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = \boxed{3^n}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n} {n \choose k} = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} 1^{k} 1^{n-k} = (1+1)^{n} = \boxed{2^{n}}$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{bmatrix} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{bmatrix}$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $k \in [1, n]$. Montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \binom{n-1}{k-1}$$

2. Calculer la somme
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}$$

$$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^{\ell} 1^{n-1-\ell}$$

$$= n 2^{n-1}.$$

Récurrences

Exercice 11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1.
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

3.
$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n : \ll \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \gg$.

Initialisation : $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0$ et $\left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$, donc $\sum_{k=0}^0 k^3 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 \text{ et } \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$ Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathscr{P}_0 vraie et on montre \mathscr{P}_0 et

<u>Hérédité</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathscr{P}_n vraie et on montre \mathscr{P}_{n+1} , c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \quad \text{(d'après } \mathscr{P}_n)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion: Pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n : \ll \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \gg$.

Initialisation: $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^0 \times 0 = 0 \text{ et } (-1)^0 \frac{0(0+1)}{2} = 0$

0, donc
$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k k^2 = (-1)^0 \frac{0(0+1)}{2}$$
 et \mathscr{P}_0 est vraie.
Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathscr{P}_n vraie et on montre \mathscr{P}_{n+1} , c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2$$

$$= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \quad (\text{d'après } \mathscr{P}_n)$$

$$= (-1)^n \frac{n(n+1) - 2(n+1)^2}{2}$$

$$= (-1)^n \frac{(n+1)(n-2(n+1))}{2}$$

$$= (-1)^n \frac{(n+1)(-n-2)}{2}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion: Pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, on pose $\mathscr{P}_n : \ll \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \gg$.

Initialisation :
$$\prod_{k=0}^0 (2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1 \qquad \text{et}$$

$$\frac{(2 \cdot 0 + 1)!}{2^0 \times 0!} = \frac{1!}{1} = 1, \quad \text{donc} \quad \prod_{k=0}^0 (2k+1) = \frac{(2 \cdot 0 + 1)!}{2^0 \times 0!} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_0$$
est vraie.

<u>Hérédité</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathscr{P}_n vraie et on montre \mathscr{P}_{n+1} ,

c'est-à-dire
$$\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} (n+1)!}.$$

$$\prod_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n} (2k+1) \times (2n+3)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \times (2n+3)$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2^n n! \times (2n+2)}$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2^n n! \times 2(n+1)}$$

$$= \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} (n+1)!},$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion: Pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, $\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.