Chapitre 1 : Équations et inéquations

Un chapitre, un mathématicien

Mohammed Al Khwarizmi (Khiva 788 – Bagdad 850)

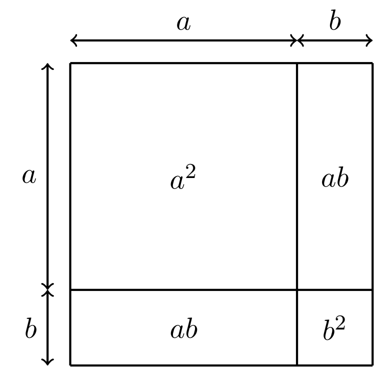
Première page du
Kitab al jabr w'al muqabalah

Mohammed Al Khwarizmi, mathématicien et astronome perse de l'âge d'or islamique, est considéré comme le père de l'algèbre.

Dans son traité, *Kitab al jabr w'al muqabalah*, il traite de façon systématique les équations du second degré. En utilisant l'*al jabr*, littéralement la remise en place, il transforme une soustraction dans un membre en une addition dans l'autre membre, tandis qu'*al muqabalah*, littéralement le balancement, revient à supprimer dans les deux membres l'addition d'un même terme. Il ramène ainsi toutes les équations du second degré à six équations qu'il sait résoudre. Les méthodes sont purement algébriques, mais, influencé par les mathématiciens grecs, il les complète toujours par un procédé géométrique de résolution.

C'est le terme *al jabr*, qui, traduit en latin par *algebra*, a donné notre mot algèbre.

Voici une illustration géométrique de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:



Comment démontrer les deux autres identités remarquables en utilisant un support géométrique ?

1 Égalités

Définition. On appelle **identité** une égalité entre deux expressions qui est vraie quelles que soient les valeurs des différentes variables employées.

Exemple. 1. Identités remarquables : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{(a+b)^2} & = & \boldsymbol{a^2+2ab+b^2} \\ \boldsymbol{(a-b)^2} & = & \boldsymbol{a^2-2ab+b^2} \\ \boldsymbol{(a+b)(a-b)} & = & \boldsymbol{a^2-b^2} \end{array}}$$

2. En trigonométrie, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\boldsymbol{\sin(x)^2+\cos(x)^2=1}\,.}$$

2 Inégalités

2.1 Notations

Définition. Une **inégalité** est un énoncé permettant de comparer l'ordre de deux objets.

▶ **Inégalités strictes**

La notation $a < b$ signifie que a est **strictement inférieur** à b.
La notation $a > b$ signifie que a est **strictement supérieur** à b.

▶ **Inégalités larges**

La notation $a \leqslant b$ signifie que a est **inférieur** (ou **inférieur ou égal**) à b. La notation $a \geqslant b$ signifie que a est **supérieur** (ou **supérieur ou égal**) à b.

2.2 Propriétés

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

▶ **Transitivité :**

$$\boxed{(\ a<b \quad \text{et} \quad b<c\ ) \quad \Longrightarrow \quad a<c}$$

▶ **Addition :**

$$\boxed{a<b \quad \Longrightarrow \quad a+c<b+c}$$

▶ **Passage à l'opposé :**

$$\boxed{a<b \quad \Longrightarrow \quad -a>-b}$$

▶ **Multiplication et division :**

Si $\boldsymbol{c>0}$, alors :

$$a<b \quad \Longrightarrow \quad ac<bc \quad \text{et} \quad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

Si $\boldsymbol{c<0}$, alors :

$$a<b \quad \Longrightarrow \quad ac>bc \quad \text{et} \quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

▶ **Passage à l'inverse :**

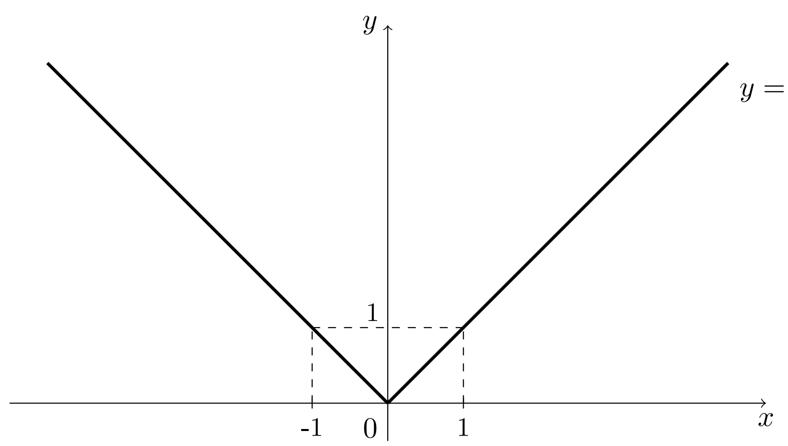
$$0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \quad \text{(inversion de l'ordre)}$$

$$a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \quad \text{(inversion de l'ordre)}$$

2.3 Valeur absolue

Définition. La valeur absolue d'un nombre réel est sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.
Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$\begin{cases} |x| = x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$



Proposition. Pour tous réels a et b :

$|a| \geqslant 0 \qquad |a| = 0 \iff a = 0$

$|ab| = |a| \times |b| \qquad \text{Si } b \neq 0, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$\boldsymbol{|a| = \sqrt{a^2}}$

Proposition. Les inégalités triangulaires :

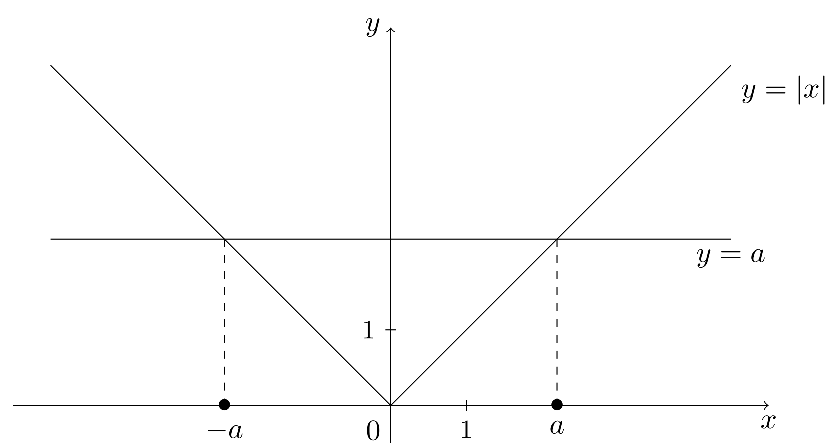
$$\boldsymbol{|a+b| \leqslant |a| + |b| \qquad \big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a-b|}$$

Comment traduire des égalités et inégalités simples faisant intervenir des valeurs absolues ?

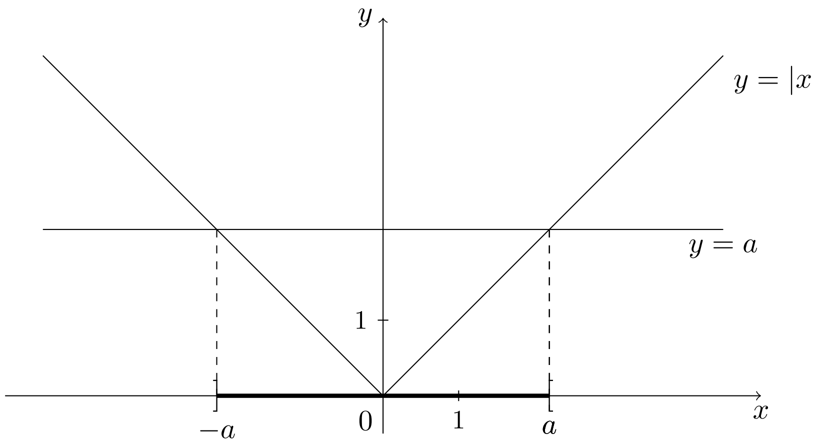
Soient x un réel et a un réel tel que $a > 0$.

$$|x| = a \iff x = -a \text{ ou } x = a$$
$$|x| < a \iff -a < x < a$$
$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$
$$|x| > a \iff x < -a \text{ ou } x > a$$
$$|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a$$

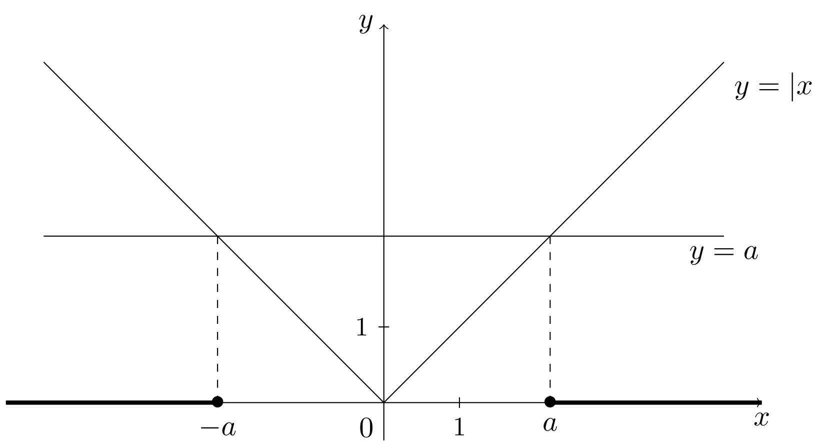
▶ $|x| = a \iff x = -a$ **ou** $x = a$



▶ $|x| < a \iff -a < x < a$



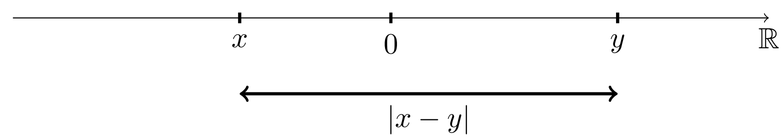
▶ $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a$ **ou** $x \geqslant a$



Remarque. Que se passe-t-il lorsque $a = 0$ ou $a < 0$?

La valeur absolue comme une distance

La quantité $|x - y|$ mesure la distance entre deux points x et y de la droite réelle.



2.4 Intervalles

Définition. (Intervalles de $\mathbb{R}$) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$$

$$]-\infty, +\infty[$$

3 Résolution d'équations et d'inéquations

Une **équation** est une égalité contenant une ou plusieurs variables, appelées **inconnues**. Résoudre une équation (ou une inéquation) d'inconnue x consiste à déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$, appelé **ensemble des solutions**, des x vérifiant l'équation (ou l'inéquation). Autrement dit, on cherche à montrer l'équivalence :

« x vérifie l'équation (ou l'inéquation) » $\Longleftrightarrow$ « $x \in \mathscr{S}$ »

Exemple. On considère l'équation $x^2 - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

....

....

....

3.1 Expressions polynomiales

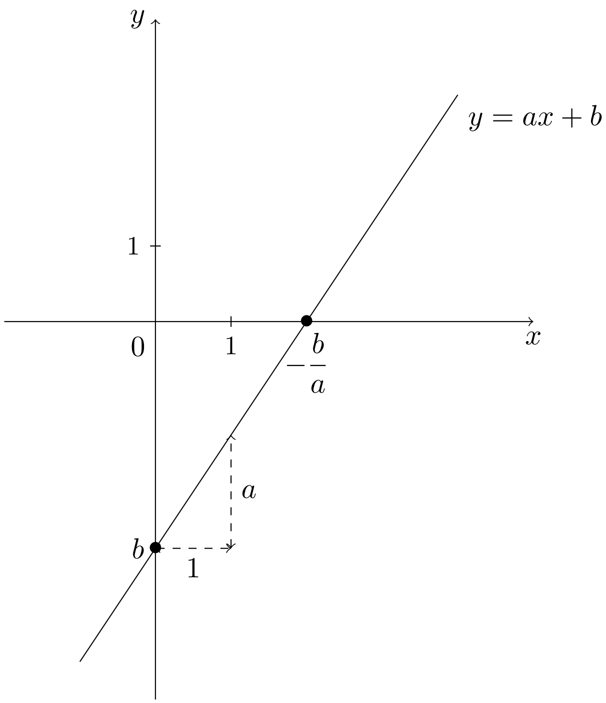
a) Degré 1 : $ax + b$

> Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme
>
> $$ax + b = 0.$$
>
> 1. Si $a \neq 0$, l'équation admet une unique solution : $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$;
> 2. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation n'admet aucune solution : $\mathscr{S} = \emptyset$;
> 3. Si $a = 0$ et $b = 0$, l'équation admet une infinité de solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :

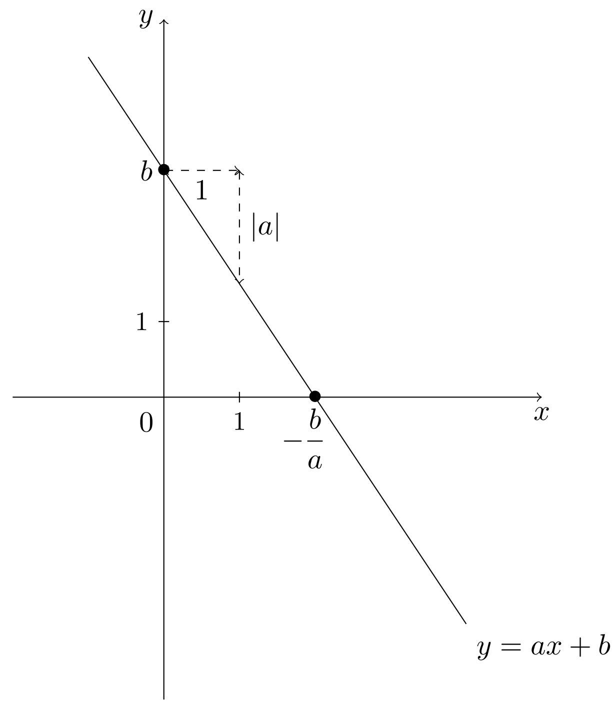
1. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-2x}{5}$
2. $2(x+4) + 1 - 5x = 3(1-x) + 7$
3. $3(2x+4) - 2x = 14 - 2(1-2x)$

► **Si** $a > 0$ **:**



x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

► **Si** $a < 0$ **:**



x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

1. $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$,
2. $\dfrac{4}{x+1} \geqslant 3$.

b) Degré 2 : $ax^2 + bx + c$

On appelle trinôme du second degré la quantité :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On appelle discriminant du trinôme le réel $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

• Racines du trinôme

Définition. Les racines du trinôme $P(x)$ sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Théorème. Le nombre de racines du trinôme du second degré du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines distinctes (appelées racines simples) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ admet une unique racine (appelée racine double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ n'admet aucune racine réelle.

Exercice 3. Déterminer les racines des trinômes suivants :

1. $P(x) = 2x^2 - x - 3$;
2. $Q(x) = x^2 - 6x + 9$;
3. $R(x) = -x^2 + 4x - 5$.

Démonstration. Étapes préliminaires :
1. Développer et simplifier l'expression :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Corps de la preuve :
On commence par normaliser le polynôme en divisant par a (car $a \neq 0$) :

$$P(x) = 0 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

• Factorisation du trinôme

Théorème. Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- admet deux racines simples x_1 et x_2, alors :

$$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

- admet une racine double x_0, alors : $P(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$
- n'admet pas de racine réelle et on ne peut pas factoriser $P(x)$.

Exercice 4. Factoriser les trinômes $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ définis dans l'exercice précédent.

• Signe du trinôme et inéquation du second degré

► Si $\boxed{\Delta > 0}$ alors le trinôme $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2.

On suppose $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

► Si $\boxed{\Delta = 0}$ alors le trinôme $P(x)$ admet une unique racine x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

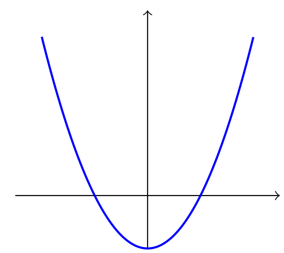
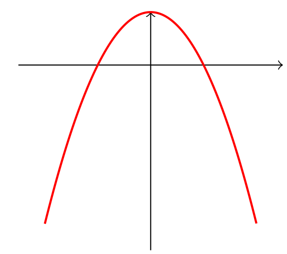
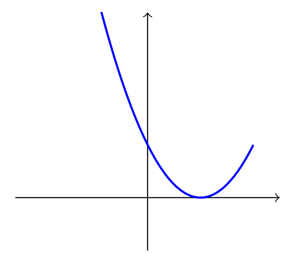
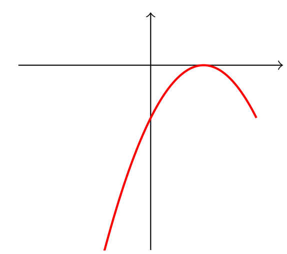
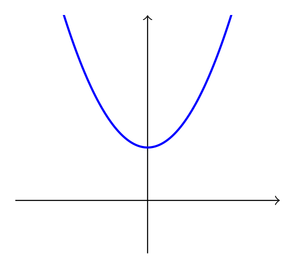
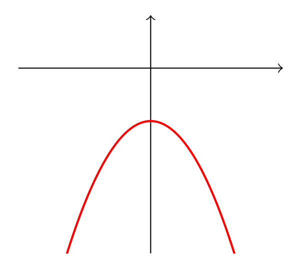
► Si $\boxed{\Delta < 0}$ alors le trinôme $P(x)$ n'admet aucune racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 - 5x + 3 < 0$
2. $-2x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$
3. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 > 0$

- **Représentation de la fonction** $x \mapsto ax^2 + bx + c$
  - Si $\Delta > 0$, la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.
  - Si $\Delta = 0$, la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
  - Si $\Delta < 0$, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Δ \ a	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

• Équation paramétrique

On appelle « équation paramétrique de paramètre m » une équation d'inconnue x dont les coefficients a, b, c dépendent de m. Par exemple,

$$(m-1)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0 \qquad (E_m)$$

est une équation paramétrique de paramètre m.

Exercice 6. Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramétrique (E_m) en fonction de la valeur de m, puis visualiser les résultats obtenus.

• Équation bicarrée

Définition. On appelle équation bicarrée, une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

- **Somme et produit de racines**

Théorème. (Relations coefficients/racines)
Si un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ admet deux racines x_1 et x_2, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque. La réciproque est vraie :

Soit le système $\begin{cases} x+y &= S \\ xy &= P \end{cases}$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Alors x et y sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.
Le système est symétrique donc si (x, y) est solution, alors (y, x) l'est aussi.

Démonstration.

- **Résolution dans les cas particuliers $b = 0$ ou $c = 0$**

c) Degré supérieur ou égal à 3

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

3.2 Équations et inéquations rationnelles

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$.

3.3 Équations et inéquations avec valeurs absolues

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x+1| < |x+2|$.

3.4 Équations et inéquations avec radicaux

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2-2x} = x-3.$$