# Chapitre 2: Fonctions usuelles

# Un chapitre, un mathématicien



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Philosophe, juriste, diplomate et mathématicien allemand, Leibniz est l'une des grandes figures de l'âge classique. Né à Leipzig, il se forme d'abord en droit et en philosophie, mais développe rapidement une passion pour les sciences et les mathématiques.

En parallèle à Newton, il met au point le calcul différentiel et intégral, en introduisant une notation  $(dx, dy, \int)$  qui reste encore aujourd'hui la plus utilisée.

C'est Leibniz qui, en 1692, emploie pour la première fois le terme  $\ll$  fonction  $\gg$  pour désigner des grandeurs

associées à une courbe, comme la pente d'une tangente, l'abscisse ou l'ordonnée d'un point. Cette idée marque une étape essentielle : elle amorce la formalisation de la dépendance entre variables, qui sera ensuite généralisée par Euler et Dirichlet.

# 1 Fonctions logarithmes

**Définition.** On appelle **logarithme népérien** et on note la la primitive nulle en 1 de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

**Proposition.** Pour tout  $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

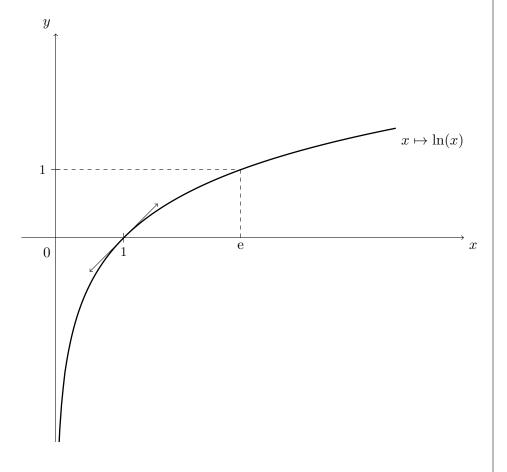
**Proposition.** 1. La fonction ln est dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ 

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$2. \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \ .$$

**Proposition.** L'équation  $\ln(x)=1$  admet une unique solution notée e :

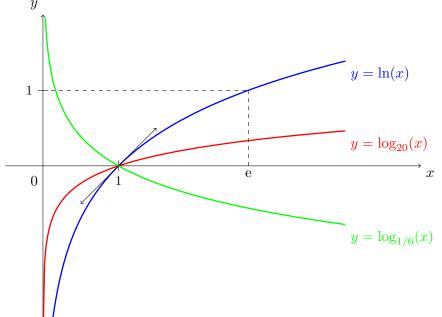
$$ln(e) = 1.$$



**Définition.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$ , on appelle fonction logarithme en base a, la fonction

$$\log_a : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Pour a = 10, cette fonction est aussi notée Log.



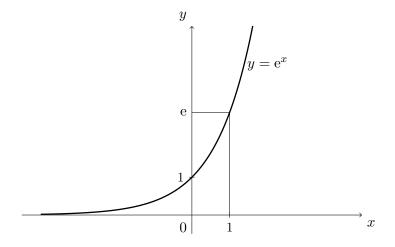
# 2 Fonctions exponentielles

**Définition.** On appelle fonction exponentielle la réciproque de la fonction ln, et on la note exp. L'image d'un réel x par cette fonction est notée  $e^x$  ou  $\exp(x)$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(x)) = x$$
 
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \qquad \exp(\ln(x)) = x$$

**Proposition.** Pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y) \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$



**Proposition.** 1. La fonction exp est dérivable et

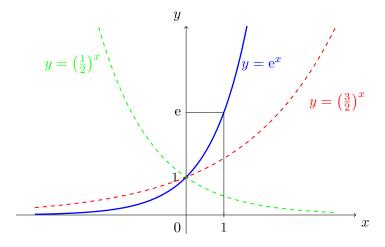
pour tout 
$$x \in \mathbb{R}$$
,  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

2. 
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
 et  $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ .

**Définition.** Soit  $a \in \mathbb{R}^{+\star}$ . On appelle fonction exponentielle en base a la fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$$
  
 $x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}.$ 

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \ln(a)a^x$ .



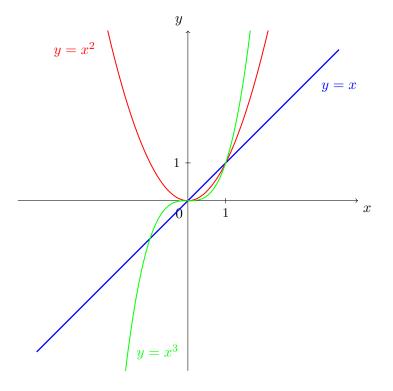
# 3 Fonctions puissances

## 3.1 Exposant entier naturel n

Ce sont les fonctions définies sur  $\mathbb R$  par

$$f_n(x) = x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}},$$

où n est un entier naturel.



**Proposition.** Pour tout  $(n,m) \in \mathbb{N}^2$  et tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$
 ;  $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$  et  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ .

**Proposition.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f_n$  est dérivable et

pour tout 
$$x \in \mathbb{R}$$
,  $f'_n(x) = nx^{n-1}$ .

Remarque. • Lorsque n est pair, la fonction  $x \mapsto x^n$  est une fonction paire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

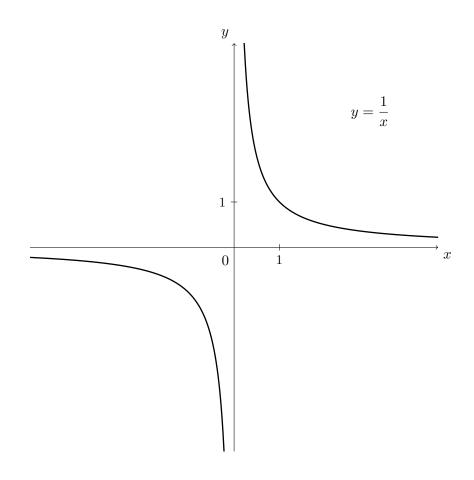
• Lorsque n est impair, la fonction  $x \mapsto x^n$  est une **fonction impaire**. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

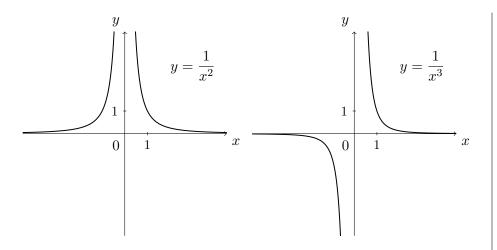
## 3.2 Exposant entier négatif -n

Ce sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f_{-n}(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{f_n(x)},$$

où n est un entier naturel.





**Proposition.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , on a

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \ .$$

**Proposition.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_{-n}$  est dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ 

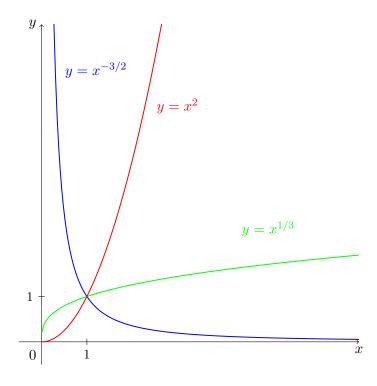
$$f'_n(x) = -nx^{-(n+1)} = -n\frac{1}{x^{n+1}}$$
.

## 3.3 Exposant réel a

Ce sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^{+\star}$  par

$$f_a(x) = e^{a \ln x}.$$

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ , on note  $x^a$  le réel  $e^{a \ln x}$ .



Ainsi, par définition même, on a

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+\star}$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(x^a) = a \ln(x)$ , Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(e^x)^a = e^{a \cdot x}$ .

**Proposition.** Pour tout  $(a,b) \in \mathbb{R}$  et tout  $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ , on a

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$
 ;  $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$  et  $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ .

**Proposition.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f_a$  est dérivable et pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ 

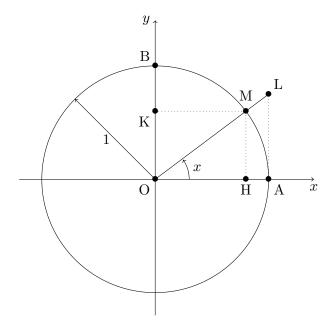
$$f_a'(x) = ax^{a-1}.$$

# 4 Fonctions trigonométriques

#### 4.1 Présentation

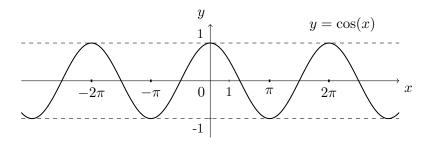
Soit M un point du cercle  $\mathcal C$  de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB), et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A. Si x désigne une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ , on sait que

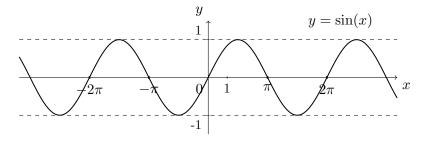
$$\cos(x) = \overline{OH} \quad \sin(x) = \overline{OK} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AL}$$

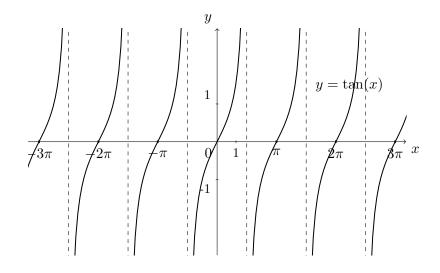


Remarque.  $\tan(x)$  existe si et seulement si L existe, c'est-à-dire si et seulement si  $M \not\in (OB)$ .

### 4.2 Représentations graphiques







### 4.3 Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	0

#### 4.4 Dérivées

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$
 et  $\sin'(x) = \cos(x)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
.

## 4.5 Propriétés élémentaires

Que l'on retrouve en dessinant simplement un cercle trigonométrique. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

#### 4.6 Formulaire

Dans le formulaire qui suit, a et b sont deux réels. On ne s'intéresse pas aux domaines de définition des fonctions : les formules ne sont donc valables que lorsqu'elles ont un sens.

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

#### Formules d'addition

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

#### Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

#### Formules de factorisation

$$\begin{array}{rcl} \cos(p) + \cos(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) & = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) & = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{array}$$