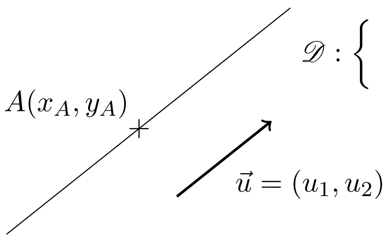
Droites du plan

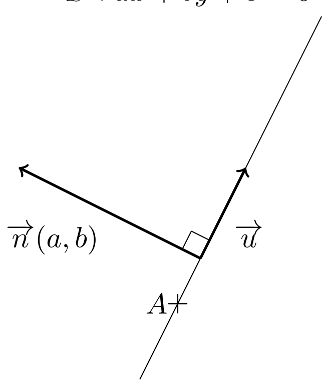
Représentation paramétrique d'une droite - Droite définie par un point et un vecteur directeur



$$\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + tu_1 \\ y & = & y_A + tu_2 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Équation cartésienne d'une droite - Droite définie par un point et un vecteur normal

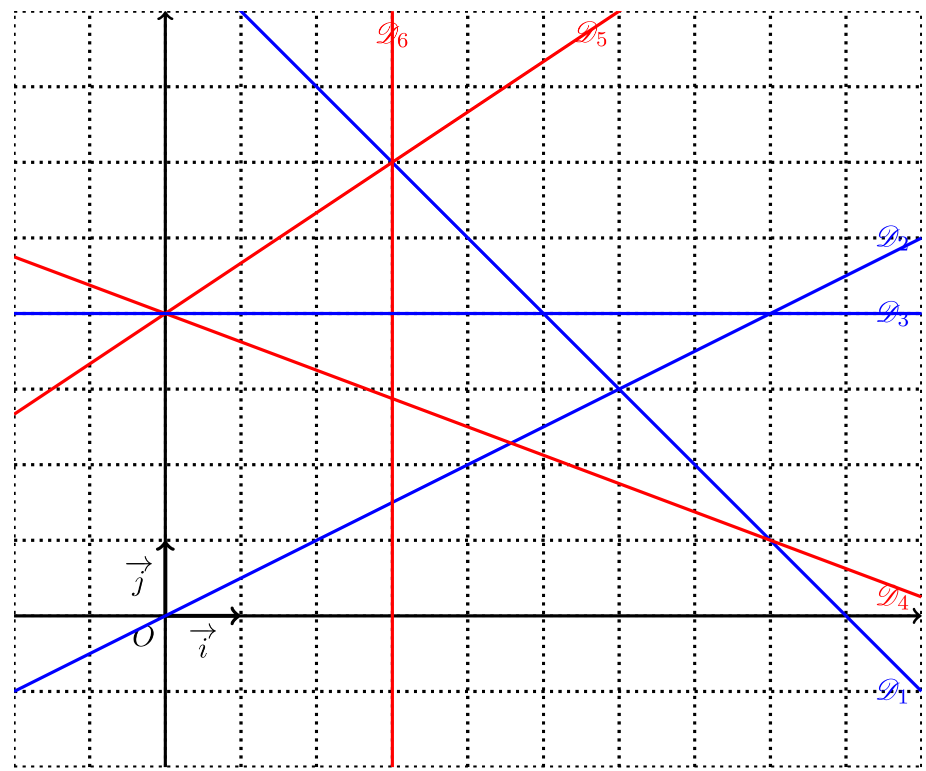
$$\mathscr{D} : ax + by + c = 0$$



Remarque. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{n}\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

Exercice 1. Lecture graphique

Déterminer une représentation paramétrique des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et une équation cartésienne des droites $\mathscr{D}_4$, $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$.



Exercice 2. Représentation et intersection de droites

1. Tracer les droites suivantes :
$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$
$\mathscr{D}_3 : \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathscr{D}_4 : \ x - 3y + 2 = 0$
$\mathscr{D}_5 : x + 2y = 0$ $\qquad \mathscr{D}_6 : \ x = 3$
2. Déterminer une équation cartésienne des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$.
3. Déterminer une représentation paramétrique des droites $\mathscr{D}_4$, $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$.
4. Montrer que les droites $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$ sont sécantes et déterminer $\mathscr{D}_4 \cap \mathscr{D}_5$.
5. Montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_4$ sont sécantes et déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_4$.
6. Montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.
7. Déterminer $\mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_5$.

Exercice 3. Mise en application

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(1,2) \quad B(5,6) \quad C(1,7) \quad L(0,4) \quad M(-1,0) \quad N(1,8).$$

1. Déterminer une représentation (paramétrique ou cartésienne) de la droite (AB).
2. On note $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.
Déterminer une représentation (paramétrique ou cartésienne) de la droite $\mathscr{D}$.
3. En déduire les coordonnées de H, point d'intersection des droites (AB) et $\mathscr{D}$.
4. Montrer que le point M appartient à la droite (AB).
5. Le point N appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?
6. Montrer que les points L, M et N sont alignés.

Exercice 4. Particules en mouvement

Deux particules A et B se déplacent dans le plan selon des mouvements rectilignes uniformes. On note $A(t)$ et $B(t)$ leurs positions à l'instant t (en secondes). À l'instant initial leurs positions sont :

$$A(0) = (0,0), \qquad B(0) = (10,0) \quad \text{(en mètres)}.$$

Leurs vitesses (vecteurs) sont constantes :

$$\vec{v}_A = (3,1) \text{ m/s}, \qquad \vec{v}_B = (-1,2) \text{ m/s}.$$

1. Déterminer si les deux particules se rencontrent (collision).
2. Si elles ne se rencontrent pas, calculer le temps de plus proche approche, noté $t^\star$, et la distance minimale qui les sépare, notée $d_{\min}$.
3. Calculer l'angle θ entre leurs trajectoires.

Exercice 5. Pour s'entraîner - La droite d'Euler

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(-1,6), \quad B(4,1) \quad \text{et} \quad C(7,2).$$

On note Ω le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer que les points Ω, H et G sont alignés.

Note historique. La droite d'Euler est la droite sur laquelle sont alignés le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle non équilatéral. Cette propriété, initialement observée par Robert Simson, a été démontrée de manière algébrique par Euler en 1765 dans son ouvrage *Solutions faciles de problèmes difficiles en géométrie.*