Vacances de la Toussaint
Guide mathématique

1 Sommes

À mémoriser

Pour tout entier naturel n, on a

1. $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{n}a_k+\sum_{k=0}^{n}b_k}$$
2. $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=0}^{n}a_k}$$
3. $$\boxed{\sum_{k=D}^{F}1=F-D+1}$$
   avec F et D des entiers naturels vérifiant $D \leqslant F$
4. $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$$
5. $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
6. Si $q \neq 1$, alors
   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

S'exercer

Exercice 1. Écrire sans symbole :

1. $A=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}k^2$
2. $B=\displaystyle\prod_{k=1}^{10}\frac{k}{k+1}$
3. $C=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\frac{k^2}{k+1}$
4. $D=\displaystyle\prod_{k=0}^{5}\frac{1}{k+1}$.

Exercice 2. Écrire les expressions suivantes avec $\sum$:

1. $A=50+51+\cdots+99+100$
2. $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}$
3. $C=1+4+9+16+25+\cdots+121$

4. $D = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{99}{100} + \frac{100}{101}$

Exercice 3. À l'aide d'un changement d'indice, calculer :

1. $A = \sum_{k=0}^{11} \left(e^{k+1} - e^{k}\right)$
2. $B = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right)$
3. $C = \sum_{k=1}^{99} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
4. $D = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)$
5. $E = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}$
6. $F = \sum_{k=1}^{10} (k! - (k-1)!)$

Exercice 4. Retravailler les exercices du TD4 (auto-correction possible avec le corrigé en ligne).

TD4.pdf

TD4_correction.pdf

2 Produits

À mémoriser

Pour tout entier naturel n, on a

1. $$\boxed{\prod_{k=0}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=0}^{n} a_k \times \prod_{k=0}^{n} b_k}$$

2. $$\boxed{\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n} b_k}}$$

3. $$\boxed{\prod_{k=0}^{n} (a_k)^{\alpha} = \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)^{\alpha}}$$

   avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $$\boxed{\prod_{k=D}^{F} \lambda = \lambda^{F-D+1}}$$

   avec F et D des entiers naturels vérifiant $D \leqslant F$

5. $$\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$$

6. $$\boxed{(n+1)! = (n+1) \times n!}$$

S'exercer

Exercice 5. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} (2k)$
2. $\prod_{k=1}^{n} 3n^2$
3. $\prod_{k=0}^{n} e^{k}$
4. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$
5. $\prod_{k=1}^{n} 2\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
6. $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k}$

3 Factorielles et coefficients binomiaux

À mémoriser

1. Définition de la factorielle : si n est un entier naturel non nul, alors
$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$
2. Relation de récurrence : pour tout entier naturel n, on a
$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$
3. Définition du coefficient binomial $\binom{n}{p}$:
$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. $\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}.$
5. Propriétés du coefficient binomial (symétrie, factorisation, formule de Pascal)
6. Formule du binôme de Newton : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

S'exercer

Exercice 6. Développer *le plus rapidement possible* les expressions suivantes :

1. $A = (x+y)^4$
2. $B = (x-y)^3$
3. $C = (1+x)^6$
4. $D = (x-1)^3$
5. $E = \left(\sqrt{2}-1\right)^4$
6. $F = (1+2x)^3$

Exercice 7. Calculer/simplifier les expressions suivantes :
$$\frac{12!}{10!} \; ; \; \frac{10!}{(6!)^2} \; ; \; \frac{11!}{9! \times 2!} \; ; \; \binom{10}{8} \; ; \; \binom{15}{14} \; ; \; \binom{13}{11} \; ;$$
$$\binom{n+1}{2} \; ; \; \binom{n+1}{n} \; ; \; \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \; ; \; \frac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$$

4 Récurrences

Exercice 8. Retravailler les six démonstrations au programme de khôlles n°6 : Formules de symétrie, de factorisation et de Pascal et récurrences :
$$\sum_{k=0}^{n} k, \; \sum_{k=0}^{n} k^2 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} q^n.$$

Exercice 9. Démontrer au choix l'une des deux propriétés suivantes par récurrence :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \; n!}$

5 Primitives

Exercice 10. Refaire la feuille d'AP Primitives pendant les vacances, *le plus rapidement possible.*

Primitives_Intégrales.pdf

Exercice 11. Refaire les exercices 4, 6 et 11 du TD3 (auto-correction possible avec le corrigé en ligne).

TD3.pdf

TD3_correction.pdf