

Vacances de la Toussaint

Guide mathématique

1 Sommes

À mémoriser

Pour tout entier naturel n , on a

1.

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

2.

$$\sum_{k=0}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^n a_k$$

3.

$$\sum_{k=D}^F 1 = F - D + 1$$

avec F et D des entiers naturels vérifiant $D \leq F$

4.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5.

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Si $q \neq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

S'exercer

Exercice 1. Écrire sans symbole :

$$1. A = \sum_{k=0}^5 k^2$$

$$2. B = \prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}$$

$$3. C = \sum_{k=0}^3 \frac{k^2}{k+1}$$

$$4. D = \prod_{k=0}^5 \frac{1}{k+1}.$$

Exercice 2. Écrire les expressions suivantes avec $\sum$:

$$1. A = 50 + 51 + \cdots + 99 + 100$$

$$2. B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$$

$$3. C = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + 121$$

$$4. D = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{99}{100} + \frac{100}{101}$$

Exercice 3. À l'aide d'un changement d'indice, calculer :

$$1. A = \sum_{k=0}^{11} (e^{k+1} - e^k)$$

$$2. B = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k} \right)$$

$$3. C = \sum_{k=1}^{99} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$4. D = \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2)$$

$$5. E = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}$$

$$6. F = \sum_{k=1}^{10} (k! - (k-1)!)$$

Exercice 4. Retravailler les exercices du TD4 (auto-correction possible avec le corrigé en ligne).

TD4.pdf

TD4_correction.pdf

2 Produits

À mémoriser

Pour tout entier naturel n , on a

1.

$$\prod_{k=0}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=0}^n a_k \times \prod_{k=0}^n b_k$$

2.

$$\prod_{k=0}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\prod_{k=0}^n a_k}{\prod_{k=0}^n b_k}$$

3.

$$\prod_{k=0}^n (a_k)^\alpha = \left(\prod_{k=0}^n a_k \right)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.

$$\prod_{k=D}^F \lambda = \lambda^{F-D+1}$$

avec F et D des entiers naturels vérifiant $D \leq F$

5.

$$\prod_{k=1}^n k = n!$$

6.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

S'exercer

Exercice 5. Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=1}^n (2k)$$

$$2. \prod_{k=1}^n 3n^2$$

$$3. \prod_{k=0}^n e^k$$

$$4. \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$$

$$5. \prod_{k=1}^n 2 \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$6. \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k}$$

3 Factorielles et coefficients binomiaux

À mémoriser

1. Définition de la factorielle : si n est un entier naturel non nul, alors

$$n! = \prod_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$

2. Relation de récurrence : pour tout entier naturel n , on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

3. Définition du coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

5. Propriétés du coefficient binomial (symétrie, factorisation, formule de Pascal)

6. Formule du binôme de Newton : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

S'exercer

Exercice 6. Développer *le plus rapidement possible* les expressions suivantes :

1. $A = (x+y)^4$
2. $B = (x-y)^3$
3. $C = (1+x)^6$
4. $D = (x-1)^3$

$$5. E = (\sqrt{2}-1)^4$$

$$6. F = (1+2x)^3$$

Exercice 7. Calculer/simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{12!}{10!} ; \frac{10!}{(6!)^2} ; \frac{11!}{9! \times 2!} ; \binom{10}{8} ; \binom{15}{14} ; \binom{13}{11} ;$$

$$\binom{n+1}{2} ; \binom{n+1}{n} ; \frac{(n+2)!}{(n+1)!} ; \frac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$$

4 Récurrences

Exercice 8. Retravailler les démonstrations au programme de khôlles n°5 : Formule de Pascal et récurrences :

$$\sum_{k=0}^n k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^k.$$

Exercice 9. Démontrer au choix l'une des deux propriétés suivantes par récurrence :

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$2. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

5 Complexes

Représentation dans le plan

Exercice 10. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Soit D le point de coordonnées $(1; -2)$. Quel est son affixe ?

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + \mathbf{i}, \quad z_B = 2\mathbf{i}, \quad z_C = 3.$$

1. Placer les points A, B, C .
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1. $|z| = 3$
2. $\operatorname{Re}(z) = -2$
3. $\operatorname{Im}(z) = 1$

Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 12. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants et identifier leurs parties réelle et imaginaire :

1. $z = (3 + 2\mathbf{i}) - (1 - 3\mathbf{i})$
2. $z = 6 + \mathbf{i} - (2 + 4\mathbf{i})$
3. $z = (1 + 2\mathbf{i})(4 + 3\mathbf{i})$
4. $z = (3 - \mathbf{i})(2 + 7\mathbf{i})$
5. $z = (1 + \mathbf{i})^2$
6. $z = (3 + \mathbf{i}\sqrt{5})(3 - \mathbf{i}\sqrt{5})$
7. $z = (2 - 5\mathbf{i})^2$
8. $z = (1 + \mathbf{i})(2 - 3\mathbf{i})(1 + \mathbf{i})$
9. $z = (1 - 2\mathbf{i})^2(2 + \mathbf{i})$

Exercice 13. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = \frac{1}{1 - \mathbf{i}}$
2. $z = \frac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i} + 2}$
3. $z = \frac{1}{4 - 3\mathbf{i}}$

4. $z = \frac{4 - 6\mathbf{i}}{3 + 2\mathbf{i}}$
5. $z = \frac{5 + 15\mathbf{i}}{\mathbf{i}}$
6. $z = \frac{1 + 2\mathbf{i}}{1 - 2\mathbf{i}}$
7. $z = \left(\frac{1 - \mathbf{i}}{2 - 3\mathbf{i}}\right) \left(\frac{3 + \mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right)$

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 14. Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1 + \mathbf{i})z = 3 - \mathbf{i}$
2. $2z + 1 - \mathbf{i} = \mathbf{i}z + 2$
3. $(2z + 1 - \mathbf{i})(\mathbf{i}z + 3) = 0$
4. $\frac{z + 1}{z - 1} = 2\mathbf{i}$
5. $(\mathbf{i}z + 1)(z + 3\mathbf{i})(z - 1 + 4\mathbf{i}) = 0$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exercice 15. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = 2 + 2\mathbf{i}\sqrt{3}$
2. $z = -\sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2}$
3. $z = 4 - 4\mathbf{i}$
4. $z = -\frac{1}{4} + \frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{4}$
5. $z = -2\mathbf{i}$
6. $z = \frac{4}{1 - \mathbf{i}}$

Exercice 16. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = (1 - \mathbf{i})^6$

2. $z = \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{1 + \mathbf{i}}$

3. $z = \frac{(\sqrt{3} + \mathbf{i})^9}{(1 + \mathbf{i})^{12}}$

4. $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{5} \right)$

5. $z = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} + \mathbf{i} \cos \frac{\pi}{6} \right)$

6. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} - \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{5} \right)$

Exercice 17. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$

2. $z = \left(\sqrt{8}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} \right) \left(\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \right)$

3. $z = \frac{6}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}$

4. $z = 3\mathbf{i}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$

Divers

Exercice 18. Soit z un complexe différent de 2. On pose $z' = \frac{\mathbf{i}z}{z - 2}$.
Montrer que

z' est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.