

On considère la fonction f définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$$

1. f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ?
2. Exprimer les dérivées f' et f'' à l'aide des fonctions usuelles.
3. Montrer qu'il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite de polynômes à coefficients réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I: f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$
4. Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 . Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .
5. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
6. Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $2f'(x) = f^2(x) + 1$ (*)
7. Pour tout entier naturel n , on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Dédurre de la relation (*) que $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

2. Intégrer par parties I_{n+1} en posant $u'(t) = 1$.

3. Exprimer $\int_0^1 t^2(1 - t^2)^n dt$ en fonction de I_n et I_{n+1} .

4. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

6. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{(2n+1)}(u) du$$

.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour quelles valeurs de n entier naturel, le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $Q = X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire une boule ; si elle est noire, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on remet dans l'urne une boule noire à la place de la boule blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue du n -ième tirage. Ainsi Y_n prend ses valeurs dans $\{0;1;2\}$.

1. Déterminer la loi de Y_1 .
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 2)$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = P(Y_n = 1)$
 - a. Préciser u_1 .
 - b. Rappeler la formules des probabilités totales et en déduire que :
$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$
 - c. En utilisant la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$, donner une expression de u_n en fonction de n .
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(Y_n = 0)$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Y_n .
6. On définit la variable aléatoire Z correspondant à l'instant où, pour la première fois, l'urne ne contient plus que des boules noires.
Déterminer la loi de Z . Montrer que Z est d'espérance finie et calculer $E(Z)$.

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On pose $B = A - I_3$.
 - a. Calculer B^2 .
 - b. En déduire une relation entre A^2 , A et I_3 .
2. On considère le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les racines de P .
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P , dont le reste sera noté R_n .
 - b. Déterminer R_n .
4. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$;
5. Proposer une autre méthode pour déterminer A^n .

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

Calculer $\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. a. Calculer I_1 .

b. Interpréter géométriquement ce calcul.

2. a. Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

b. Montrer que : pour tout $n \geq 1$, $I_n \geq 0$

c. Etudier la convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \sum_{k=0}^n \frac{e(-1)^{n+k} n!}{k!} + (-1)^{n-1} n!$

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et

$\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$M \longmapsto AM - MA.$

i. On admet que φ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ii. Déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im} \varphi$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non scalaire et

$$\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad M \longmapsto AM - MA.$$

i. Prouver que φ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, puis donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ii. Déterminer deux éléments de $\ker \varphi$. Que peut-on en déduire pour la dimension de $\ker \varphi$?

iii. Montrer que le rang de φ est supérieur ou égal à 2.

iv. En déduire $\ker \varphi$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ vérifiant :

Pour tout $x \in [a; b]$, $f(a + b - x) = f(x)$.

a) Démontrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

b) En déduire $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$